Software Mathematica v přírodních vědách a ekonomii

Autoři: Jan Říha, František Látal, Veronika Kainzová, Vratislava Mošová, Ivo Vyšín, Filip Švrček, Lukáš Richterek

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

1 Úvod

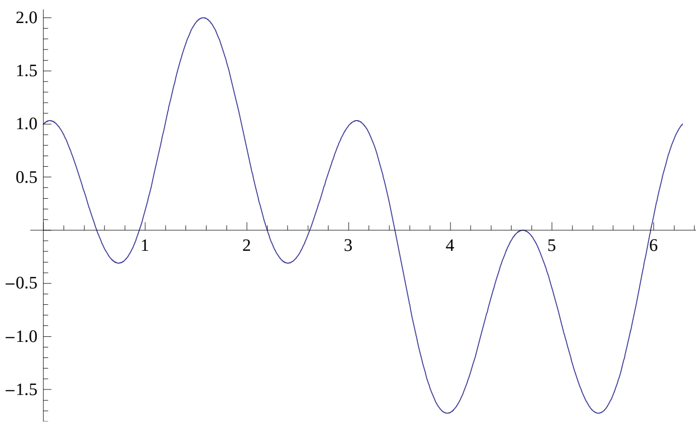
1.1 Základní pravidla

- Výpočet jednoduchých rovnic, ale i tvorba složitých interaktivních grafů a simulací se vytváří v Notebooku. Chceme-li pro zadání úlohy využít syntaxe programu *Mathematica*, je nutné dodržet několik základních pravidel:
  - Pro zadání informací k výpočtu použijeme buňku označenou **`In[n]:=`** (Input Cell) a vypočítaná hodnota se zobrazí v buňce **`Out[n]:=`** (Output Cell).
  - Výpočet v buňce se provede stisknutím kombinace kláves **SHIFT+ENTER** nebo stiskem klávesy ENTER na numerické klávesnici.
  - Pomocí symbolu **`%`** můžeme využít předchozího výsledku.
  - Pokud se za příkazem napíše středník, pak se příkaz provede, ale vypočítaná hodnota se nezobrazí v Notebooku.
  - Názvy funkcí se píší vždy s velkým písmenem na začátku.
  - Argumenty funkcí se uvádí v hranatých závorkách.
  - Jestliže je název funkce modrou barvou, je název funkce zapsán špatně. Pokud je název funkce uveden správně, změní se modrý text na černou barvu.
  - K zápisu desetinného čísla se používá tečka.
  - Násobení symbolů může být prezentováno mezerou.
  - Nápovědu lze nalézt v horním řádku Help → Documentation Center.
  - Symbol "**=**" se používá k definici nové proměnné, symbol "**==**" znamená rovnost v rovnici.

Příklady:

```
In[1]:= 5 + 3
Out[1]= 8
In[2]:= 15 !
Out[2]= 1 307 674 368 000
In[3]:= Solve[c - 8 == 1, c]
Out[3]= {{c → 9}}
In[4]:= Plot[Sin[x] + Cos[4 x], {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[4]=



Důležitým pomocníkem při práci v Notebooku jsou Palety, které jednoduchým způsobem umožňují využívat jednotlivé funkce programu. Palety se nacházejí v horním řádku programu pod názvem **Palettes**. Při práci v notebooku se nám budou nejvíce hodit palety:

- **Basic Math Assistant**, která je rozdělena na další podkategorie:

  Calculator - obsahuje syntaxe příkazů pro aritmetiku, algebru, matice, trigonometrické a exponenciální funkce, integrální a diferenciální počet atd.

$$\int_{lower}^{upper} expr \, d\, var$$

$$\sum_{index=start}^{end} expr$$

  Basic Commands - obsahuje matematické konstanty, elementární funkce, nabízí jednotlivé vlastnosti tabulek, 2D a 3D grafů apod.

```
Table[expr, {var, start, end}]
Plot3D[{function1, function2}, {var1, min, max}, {var2, min, max}]
```

- **Writing Assistant -** paleta, která je rozdělena do několika podkategorií:

  Writting and Formatting - umožňuje práci s textem (tučně, kurzíva, velikost textu ap.), dále umožňuje úpravy jednotlivých buňek (pozadí buněk, orámování buňek), zrovnání textu, lze také nastavit hranice jednotlivých stránek v prezentaci (Start Slide, End Slide) atd.
  Typesetting - umožňuje zadat písmena řecké abecedy, speciální symboly, tvary či operátory.

- V programu *Mathematica* je dnes možné pomocí textového vstupu napsat souvislou práci (například diplomovou práci), přičemž si můžeme vybrat z řady formátů kapitol a podkapitol.

Příklad:

Tvorba textu a dokumentu

Notebook

Buňka

Styl

Do textových polí můžeme vládat také matematické vzorce, např. $\int_0^1 x\, e^x \, dx$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x^n}$.

- K jinému zadání výpočtu, pokud například neznáme odpovídající syntaxi, využíváme tzv. “volný jazykový vstup” (anglicky free-form linguistic input). *Mathematica* plně využívá možností serveru Wolfram|Alpha, který nejprve vstup (označen symbolem) v anglickém jazyce převede do syntaxe programu *Mathematica* a poté provede odpovídající výpočet.

Příklad:

```
In[5]:= integrate x exp x from 0 to 1
        Integrate[x * Exp[x], {x, 0, 1}]
Out[5]= 1
```

Pokud očekáváme plný výstup, který nám vytvoří k danému zadání server Wolfram|Alpha, využijeme vstup označený symbolem .

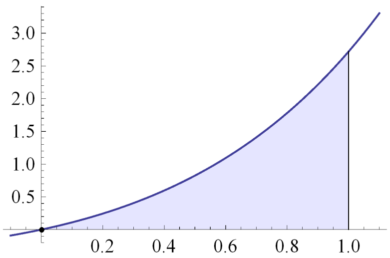
Příklad:

In[6]:= **integrate x exp x from 0 to 1**

Definite integral:

$$\int_0^1 x\exp(x)\,dx = 1$$

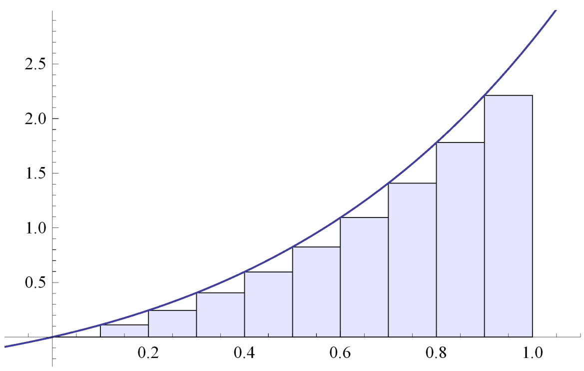
Visual representation of the integral:



Riemann sums: More cases

left sum	$\frac{e^{\frac{1}{n}+1}(n-1)+e^{\frac{1}{n}}-e\,n}{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 n^2} = 1-\frac{e}{2\,n}+O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$

(assuming n subintervals of equal length)



integral: 1

Riemann sum: 0.867782

error: 0.132218

number of subintervals

summation method: left endpoint | midpoint | right endpoint

WolframAlpha

1.2 Grafy funkcí - 2D

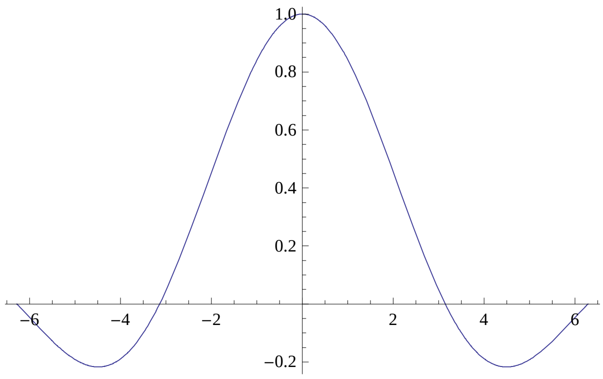
- Pro vykreslení 2D grafů funkcí je v *Mathematice* zabudována funkce **`Plot`**. Pokusíme se zde vystihnout základní vlastnosti této funkce, vše budeme prezentovat na příslušných příkladech.
- V argumentu funkce Plot musí být zadána nejdříve vykreslovací funkce a dále ve složených závorkách proměnná, pro kterou je funkce vykreslována, a meze této nezávislé proměnné.

Příklady:

```
Plot[function1, {var, min, max}]
```

In[7]:= **Plot**$\left[\frac{\mathbf{Sin}[\mathbf{x}]}{\mathbf{x}}, \{\mathbf{x}, -2\,\mathbf{Pi}, 2\,\mathbf{Pi}\}\right]$

Out[7]=

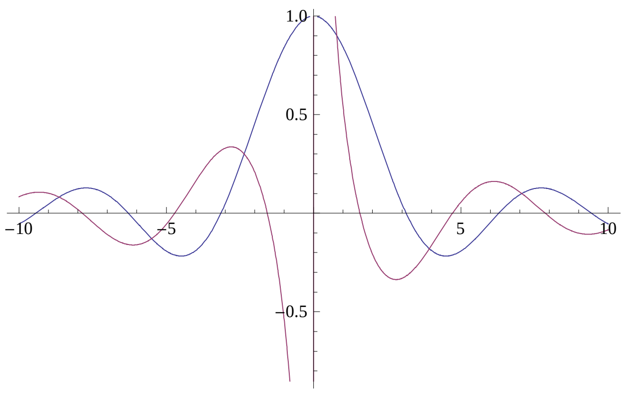


- Do jednoho grafu můžeme vykreslit i více funkcí. Tyto fukce musíme uzavřít do složených závorek. Zápis bude následující:

```
Plot[{function1, function2}, {var, min, max}]
```

In[8]:= **Plot**$\left[\left\{\frac{\mathbf{Sin}[\mathbf{x}]}{\mathbf{x}}, \frac{\mathbf{Cos}[\mathbf{x}]}{\mathbf{x}}\right\}, \{\mathbf{x}, -10, 10\}\right]$

Out[8]=



- Nyní se podívejme, jak se pracuje s parametry funkce **`Plot`.** Všechny parametry vestavěné funkce i s jejich výchozím nastavením lze vypsat pomocí funkce **`Options`**, v našem případě **`Options[Plot]`**.

In[9]:= **`Options[Plot]`**

Out[9]=
```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True, AxesLabel → None,
 AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic,
 BaseStyle → {}, ClippingStyle → None, ColorFunction → Automatic,
 ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic, ContentSelectable → Automatic,
 CoordinatesToolOptions → Automatic, DisplayFunction :→ $DisplayFunction,
 Epilog → {}, Evaluated → Automatic, EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic,
 ExclusionsStyle → None, Filling → None, FillingStyle → Automatic,
 FormatType :→ TraditionalForm, Frame → False, FrameLabel → None,
 FrameStyle → {}, FrameTicks → Automatic, FrameTicksStyle → {}, GridLines → None,
 GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0., ImagePadding → All, ImageSize → Automatic,
 ImageSizeRaw → Automatic, LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None,
 MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None, MeshStyle → Automatic, Method → Automatic,
 PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal, PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic,
 PlotRange → {Full, Automatic}, PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic,
 PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic,
 Prolog → {}, RegionFunction → (True &), RotateLabel → True,
 Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

- Pro změnu výchozího nastavení některého z parametrů dané funkce musíme použít funkci **SetOptions**. Příklad použití této funkce si ukážeme právě na funkci **Plot**. Změníme výchozí hodnotu parametru **GridLines** z původní hodnoty "**None**" a novou hodnotu "**Automatic**".

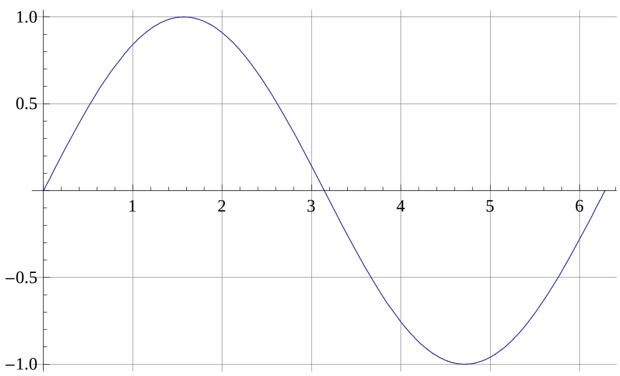
In[10]:=
```
SetOptions[Plot, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=
```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True, AxesLabel → None,
 AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic,
 BaseStyle → {}, ClippingStyle → None, ColorFunction → Automatic,
 ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic, ContentSelectable → Automatic,
 CoordinatesToolOptions → Automatic, DisplayFunction :→ $DisplayFunction,
 Epilog → {}, Evaluated → Automatic, EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic,
 ExclusionsStyle → None, Filling → None, FillingStyle → Automatic,
 FormatType :→ TraditionalForm, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → {},
 FrameTicks → Automatic, FrameTicksStyle → {}, GridLines → Automatic,
 GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0., ImagePadding → All, ImageSize → Automatic,
 ImageSizeRaw → Automatic, LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None,
 MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None, MeshStyle → Automatic, Method → Automatic,
 PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal, PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic,
 PlotRange → {Full, Automatic}, PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic,
 PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic,
 Prolog → {}, RegionFunction → (True &), RotateLabel → True,
 Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

- Pokud si necháme vykreslit graf, jeho vzhled bude následující:

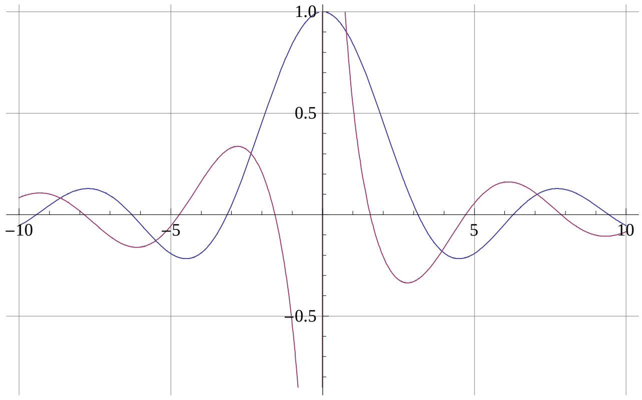
In[11]:=
```
Plot [Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[11]=



In[12]:= `Plot[{Sin[x]/x, Cos[x]/x}, {x, -10, 10}]`

Out[12]=



- Nastavení mřížky můžeme zrušit následujícím příkazem:

In[13]:= `SetOptions [Plot, GridLines → None]`

Out[13]=

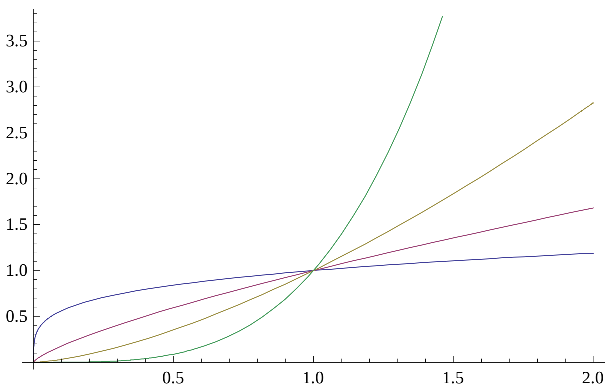
```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True, AxesLabel → None,
 AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic,
 BaseStyle → {}, ClippingStyle → None, ColorFunction → Automatic,
 ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic, ContentSelectable → Automatic,
 CoordinatesToolOptions → Automatic, DisplayFunction :→ $DisplayFunction,
 Epilog → {}, Evaluated → Automatic, EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic,
 ExclusionsStyle → None, Filling → None, FillingStyle → Automatic,
 FormatType :→ TraditionalForm, Frame → False, FrameLabel → None,
 FrameStyle → {}, FrameTicks → Automatic, FrameTicksStyle → {}, GridLines → None,
 GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0., ImagePadding → All, ImageSize → Automatic,
 ImageSizeRaw → Automatic, LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None,
 MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None, MeshStyle → Automatic, Method → Automatic,
 PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal, PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic,
 PlotRange → {Full, Automatic}, PlotRangeClipping → True, PlotRangePadding → Automatic,
 PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic,
 Prolog → {}, RegionFunction → (True &), RotateLabel → True,
 Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

- Změny parametrů funkce **`Plot`** pomocí funkce **`SetOptions`** platí pro všechny následně vytvořené grafy, chceme-li však změnit parametry jen u určitého grafu, napíšeme tyto změny přímo ve funkci **`Plot`**.

Příklady:

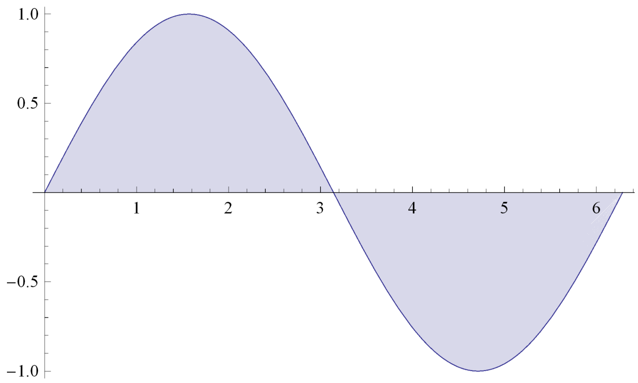
In[14]:= `Plot[{x^(1/4), x^(3/4), x^(3/2), x^(7/2)}, {x, 0, 2}]`

Out[14]=



In[15]:= `Plot [Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, Filling → Axis]`

Out[15]=

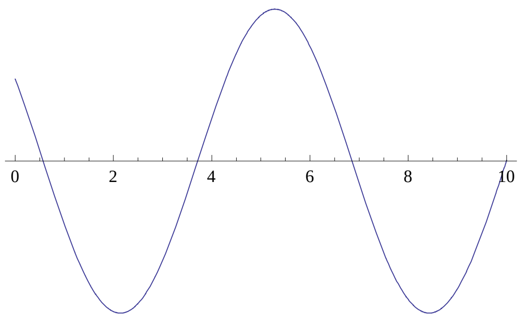


- Popis vybraných parametrů funkce Plot:
  - **`Axes`** - parametr pro vykreslování os:
    `Axes → True` - osy budou vykresleny
    `Axes → False` - osy nebudou vykresleny
    `Axes → {True, False}` - osa *x* bude vykreslena, osa *y* nebude vykreslen
    `Axes → {False, True}` - osa *x* nebude vykreslena, osa *y* bude vykreslena
  - **`AxesLabel`** - parametr pro popisky os grafu:
    `AxesLabel → {nazev_osy_x, nazev_osy_y}` - popisky pro jednotlivé osy
  - **`AxesOrigin`** - parametr pro určení průsečíku osy *x* a *y*:
    `AxesOrigin → {x, y}` - průsečík je dán bodem {x, y}
  - **`AxesStyle`** - parametr pro urční stylu jednotlivých os*:*
    `AxesStyle → {Red, Blue}` - osa x je červenou barvou a osa y modrou
    `AxesStyle → Thick` - osy budou tučně
    `AxesStyle → Arrowheads[{hodnota_1,hodnota_2}]` - osy budou ukončeny šipkou
  - **`Ticks`** - parametr pro nastavení značek měřítka os:
    `Ticks → None` - graf bez značek měřítka os
    `Ticks →` $\{\{x_1, x_2, ..., x_N\}, \{y_1, y_2, ..., y_N\}\}$ - zadání značek na specifické pozice
    `TicksStyle → Orange` - nastaví barvu (oranžová) značek na ose

Příklady:

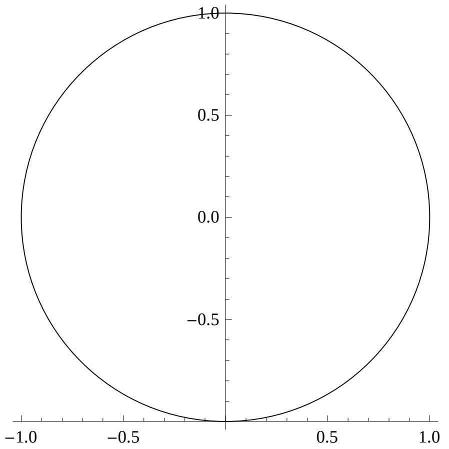
In[16]:= `Plot[Cos[x + 1], {x, 0, 10}, Axes → {True, False}]`

Out[16]=



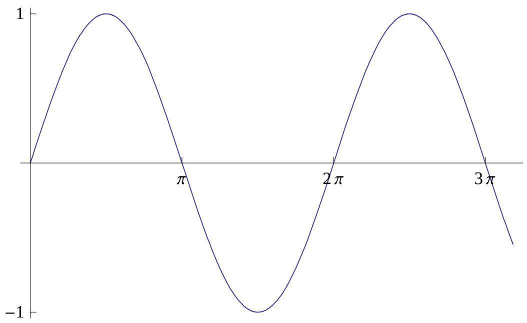
In[17]:= `Graphics[Circle[], Axes → True, AxesOrigin → {0, -1}]`

Out[17]=



In[18]:=
```
Plot[Sin[x], {x, 0, 10}, Ticks → {{0, Pi, 2 Pi, 3 Pi}, {-1, 1}}]
```

Out[18]=



- Parametry rámu grafu:

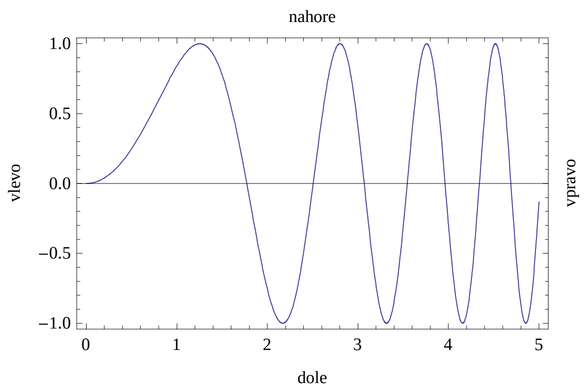
  - **`Frame`** - parametr pro orámování grafu:
    `Frame → True` - graf bude orámován
    `Frame → False` - graf nebude orámován

  - **`FrameLabel`** - parametr pro pojmenování jednotlivých stran:
    `FrameLabel → {x_down, y_left}` - pojmenuje spodní a levou část rámu
    `FrameLabel → {x_down, y_left, x_up, y_right}` - pojmenuje spodní, levou, horní a pravou část rámu

Příklady:

In[19]:=
```
Plot[Sin[x^2], {x, 0, 5}, Frame → True, FrameLabel → {dole, vlevo, nahore, vpravo}]
```

Out[19]=



- Parametry textu v grafu:

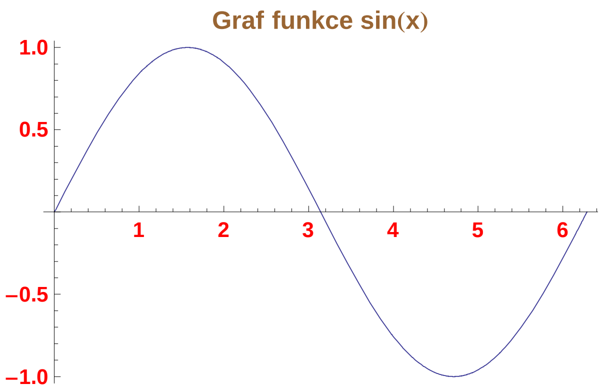
  - **`PlotLabel`** - parametr pro pojmenování grafu:
    `PlotLabel → None` - žádné pojmenování
    `PlotLabel → název_grafu` - k pojmenování grafu můžeme použít libovolného výrazu

- **TextStyle** - parametr pro nastavení stylu písma v celém grafu:
  TextStyle → {"style"} - výběr stylu písma, lze použít předdefinovaných stylů

- **StyleForm** - parametr pro nastavení stylu vybraného textu:
  StyleForm[*expr*,"*style*"] - *expr* je výraz, u kterého nastavujeme předdefinovaný styl

Příklady:

In[20]:=
```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi},
 PlotLabel → StyleForm["Graf funkce sin(x)", FontColor → Brown],
 TextStyle → {FontFamily → "Arial", FontSize → 11,
   FontColor → RGBColor[1, 0, 0], FontWeight → "Bold"} ]
```

Out[20]=


- Další parametry grafu:

- **Filling** - funkce pro vybarvení určité části grafu :
  Filling → Top - vybarvení oblasti nad křivkou
  Filling → Bottom - vybarvení oblasti pod křivkou
  Filling → Axis - vybarvení oblasti mezi křivkou a osou x
  Filling → {1 → Axis} - pokud je v grafu více křivek, vybarvení se vztahuje na 1. křivku
  Filling → {1 → {2}} - vybarví se oblast mezi 1. a 2. křivkou
  Filling → {1 → {{2}, Yellow}} - žlutou barvou se vybarví oblast mezi 1. a 2. křivkou

- **ParametricPlot** - graf funkce zadané parametricky.

- **ListPlot** - bodový graf, který odpovídá seznamu zadaných hodnot.

- **BarChart** - sloupcový graf, který odpovídá seznamu zadaných hodnot:
  ChartLegends → {"a","b","c"} - legenda (a, b, c) ke grafu
  ChartLabels → {"a","b","c"} - popisky jednotlivých sloupců v grafu
  ChartLabels → {Placed[{"a", "b","c"}, Center]} - popisky uprostřed jednotlivých sloupců
  ChartStyle → {Red, Green, Yellow} - barvy (červená, zelená, žlutá) jednotlivých sloupců v grafu
  ChartBaseStyle → EdgeForm[Dashed] - ohraničení sloupců v grafu je čárkovaně
  ChartStyle → EdgeForm[None] - bez ohraničení jednotlivých sloupců v grafu
  BarSpacing → None - sloupce grafu bez mezer

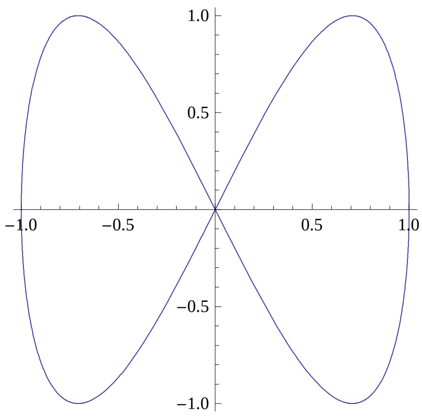
- **PieChart** - koláčový graf, který odpovídá seznamu zadaných hodnot:
  SectorOrigin → {Automatic, 1} - graf ve tvaru prstence
  SectorSpacing → {.1, Automatic} - koláčový graf s mezerami mezi jednotlivými výsečemi

Příklady:

```
ParametricPlot[{x function, y function}, {var, min, max}]
```

In[21]:=
```
ParametricPlot[{Sin[t], Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```

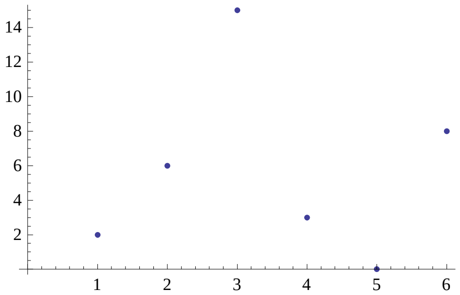
Out[21]=




```
ListPlot[{y1, y2, …}]
```

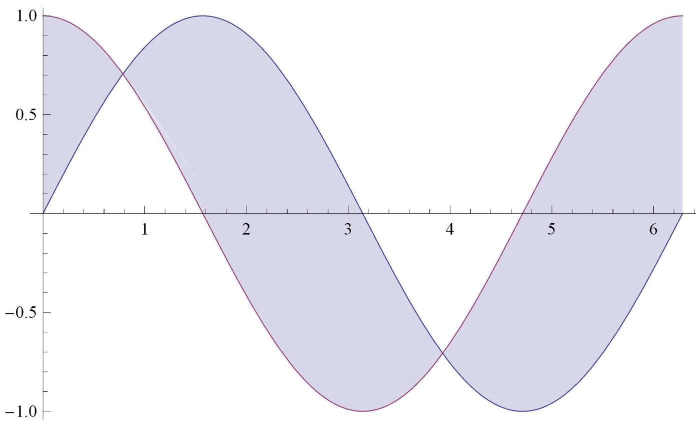
In[22]:=
```
ListPlot[{2, 6, 15, 3, 0, 8}]
```

Out[22]=



In[23]:=
```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}, Filling → {1 → {2}}]
```

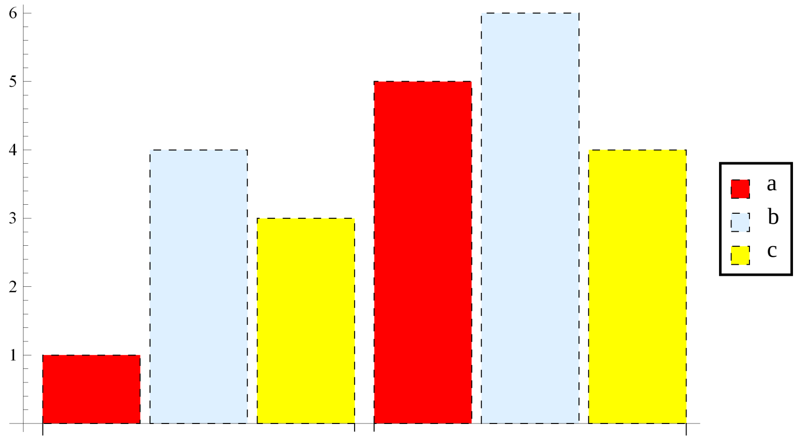
Out[23]=




```
BarChart[{{height11, height12, …}, {height21, height22, …}, …}]
```

In[24]:=
```
BarChart[{{1, 4, 3}, {5, 6, 4}}, ChartBaseStyle → EdgeForm[Dashed],
 ChartStyle → {Red, LightBlue, Yellow}, ChartLegends → {a, b, c}]
```

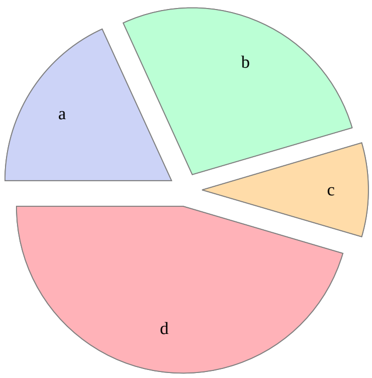
Out[24]=



PieChart[{size1, size2, ...}]

In[25]:=
```
PieChart[{2, 3, 1, 5}, SectorSpacing → {.1, Automatic},
 ChartLabels → Placed[{"a", "b", "c", "d"}, "RadialOuter"]]
```

Out[25]=



1.3 Grafy funkcí - 3D

- Pro vykreslení grafů funkcí dvou reálných proměnných a ploch je v *Mathematice* zabudována funkce **Plot3D**. Pokusíme se zde vystihnout základní vlastnosti této funkce, vše budeme prezentovat na příslušných příkladech. Mnoho vlastností je analogických s tvorbou grafů funkcí a křivek v rovině.

Příklady:

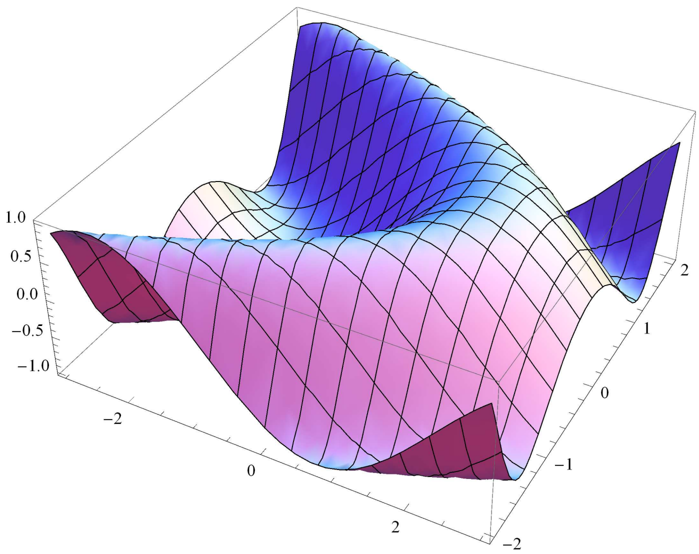
In[26]:=
```
Options[Plot3D]
```

Out[26]=
```
{AlignmentPoint → Center, AspectRatio → Automatic, AutomaticImageSize → False,
 Axes → True, AxesEdge → Automatic, AxesLabel → None, AxesOrigin → Automatic,
 AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic, BaseStyle → {},
 BoundaryStyle → GrayLevel[0], Boxed → True, BoxRatios → {1, 1, 0.4},
 BoxStyle → {}, ClippingStyle → Automatic, ColorFunction → Automatic,
 ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic, ContentSelectable → Automatic,
 ControllerLinking → Automatic, ControllerMethod → Automatic,
 ControllerPath → Automatic, CoordinatesToolOptions → Automatic,
 DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {}, Evaluated → Automatic,
 EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic, ExclusionsStyle → None,
 FaceGrids → None, FaceGridsStyle → {}, Filling → None, FillingStyle → Opacity[0.5],
 FormatType :→ TraditionalForm, ImageMargins → 0., ImagePadding → All,
 ImageSize → Automatic, LabelStyle → {}, Lighting → Automatic, MaxRecursion → Automatic,
 Mesh → Automatic, MeshFunctions → {#1 &, #2 &}, MeshShading → None,
 MeshStyle → Automatic, Method → Automatic, NormalsFunction → Automatic,
 PerformanceGoal :→ $PerformanceGoal, PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic,
 PlotRange → {Full, Full, Automatic}, PlotRangePadding → Automatic,
 PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic,
 Prolog → {}, RegionFunction → (True &), RotationAction → Fit, SphericalRegion → False,
 TextureCoordinateFunction → Automatic, TextureCoordinateScaling → Automatic,
 Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, ViewAngle → Automatic, ViewCenter → Automatic,
 ViewMatrix → Automatic, ViewPoint → {1.3, -2.4, 2.}, ViewRange → All,
 ViewVector → Automatic, ViewVertical → {0, 0, 1}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```

```
Plot3D[{function1, function2}, {var1, min, max}, {var2, min, max}]
```

In[27]:=
```
Plot3D[Sin[x + y^2], {x, -3, 3}, {y, -2, 2}]
```

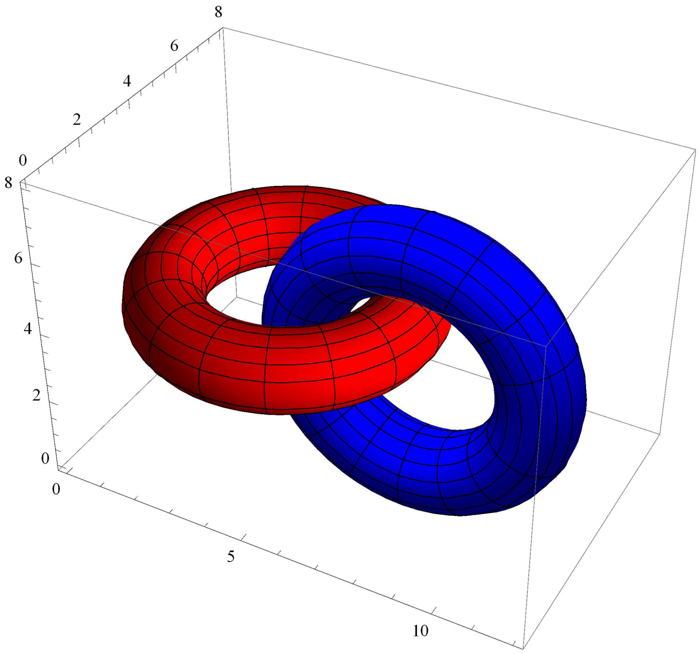
Out[27]=




```
ParametricPlot3D[
 {{x function1, y function1, z function1}, {x function2, y function2, z function2}}, {var, min, max}]
```

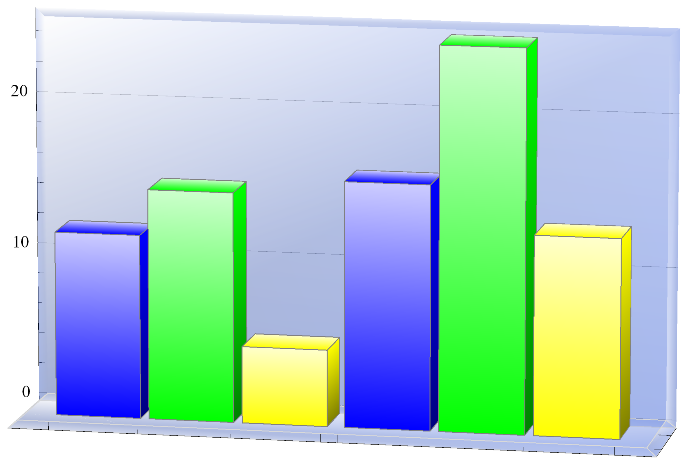
```
In[28]:= ParametricPlot3D[{{4 + (3 + Cos[v]) Sin[u], 4 + (3 + Cos[v]) Cos[u], 4 + Sin[v]},
   {8 + (3 + Cos[v]) Cos[u], 3 + Sin[v], 4 + (3 + Cos[v]) Sin[u]}},
  {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Red, Blue}]
```

Out[28]=



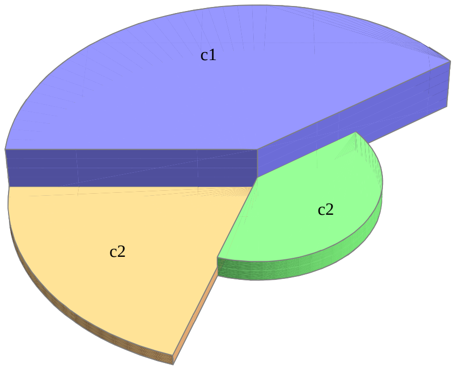

```
BarChart3D[{{height11, height12, ...}, {height21, height22, ...}, ...}]
In[29]:= BarChart3D[{{12, 15, 5}, {16, 25, 13}}, ChartStyle → {Blue, Green, Yellow}]
```

Out[29]=




```
SectorChart3D[{{size1, radius1, height1}, {size2, radius2, height2}, ...}]
In[30]:= SectorChart3D[{{2, 2, 5}, {2, 1, 2}, {1, 2, 1}}, ChartLabels → {"c1", "c2", "c2"}]
```

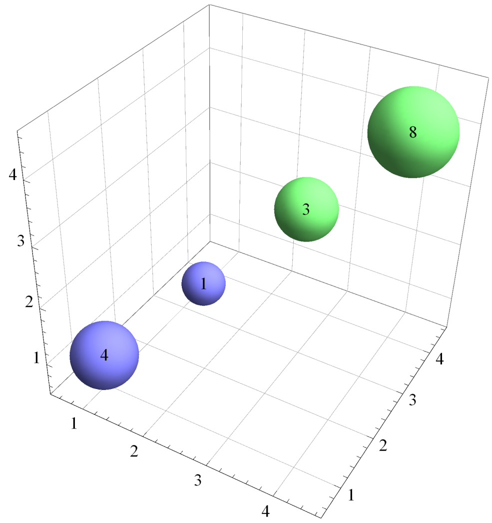
Out[30]=



`BubbleChart3D[{{x1, y1, z1, size1}, {x2, y2, z2, size2}, ...}]`

In[31]:=
```
BubbleChart3D[{{{1, 1, 1, 4}, {2, 2, 2, 1}}, {{3, 3, 3, 3}, {4, 4, 4, 8}}},
 LabelingFunction → Center]
```

Out[31]=



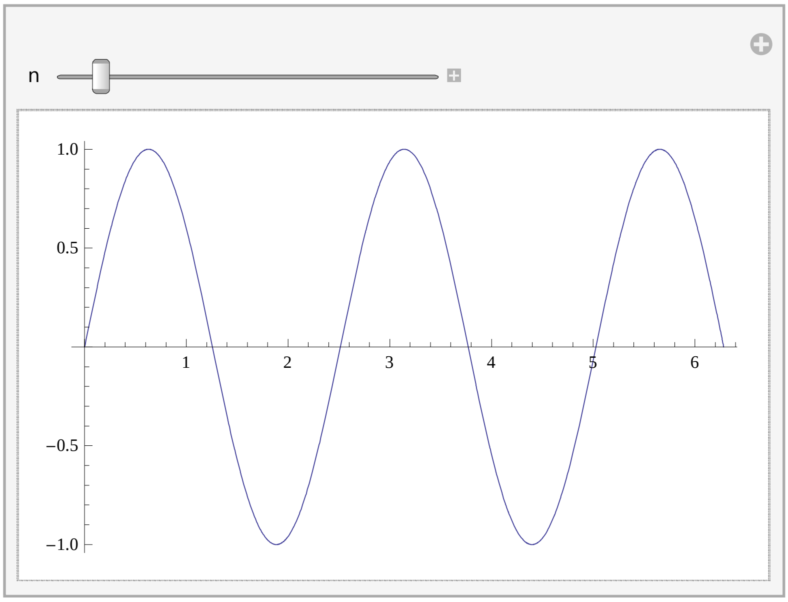
1.4 Příkazy Manipulate a Animate

- Příkaz **`Manipulate`** vytváří interaktivní objekty.
- S využitím posuvného jezdce lze interaktivně měnit parametry zkoumané funce.

Příklady:

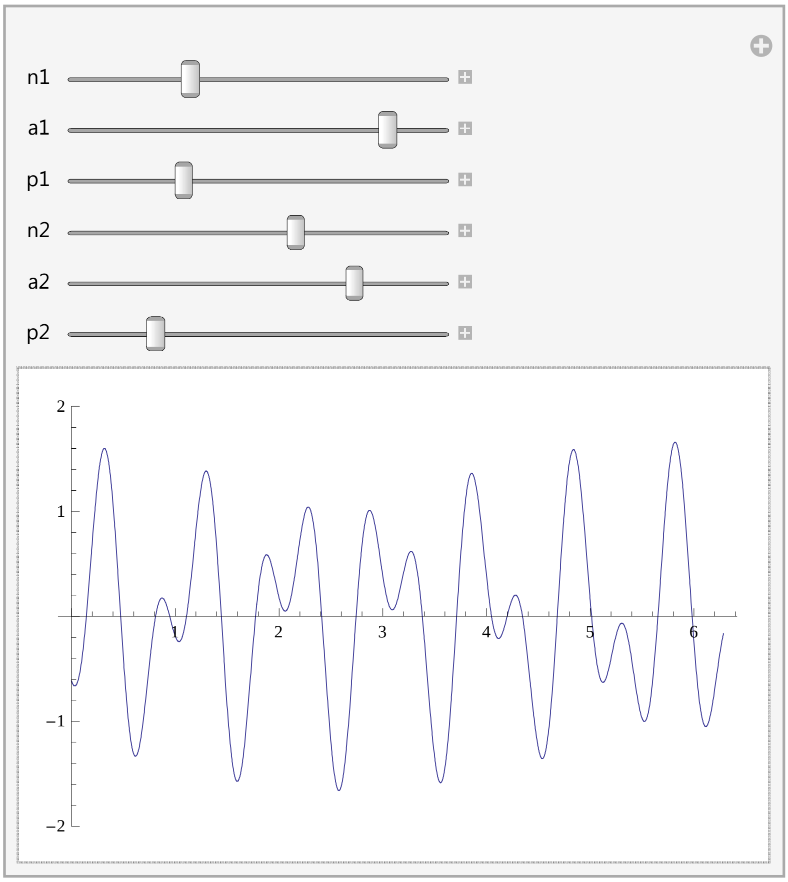
In[32]:=
```
Manipulate[Plot[Sin[n x], {x, 0, 2 Pi}], {n, 1, 20}]
```

Out[32]=



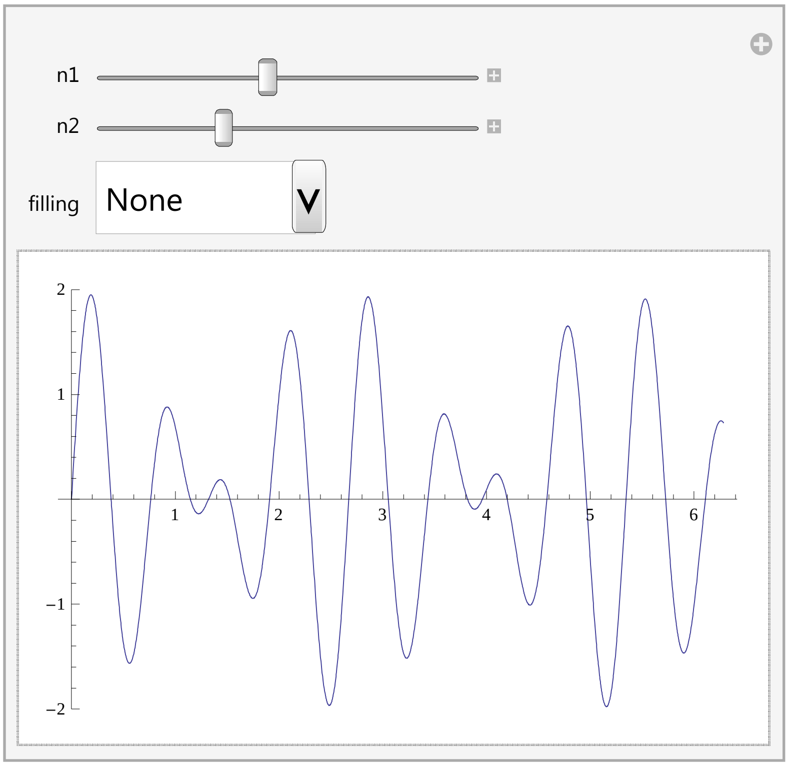
In[33]:=
```
Manipulate[Plot[a1 Sin[n1 (x + p1)] + a2 Sin[n2 (x + p2)], {x, 0, 2 Pi}, PlotRange → 2],
 {n1, 1, 20}, {a1, 0, 1}, {p1, 0, 2 Pi}, {n2, 1, 20}, {a2, 0, 1}, {p2, 0, 2 Pi}]
```

Out[33]=



In[34]:=
```
Manipulate[Plot[Sin[n1 x] + Sin[n2 x], {x, 0, 2 Pi}, Filling → filling, PlotRange → 2],
 {n1, 1, 20}, {n2, 1, 20},
 {filling, {None, Axis, Top, Bottom, Automatic, 1, 0.5, 0, -0.5, -1}}]
```

Out[34]=

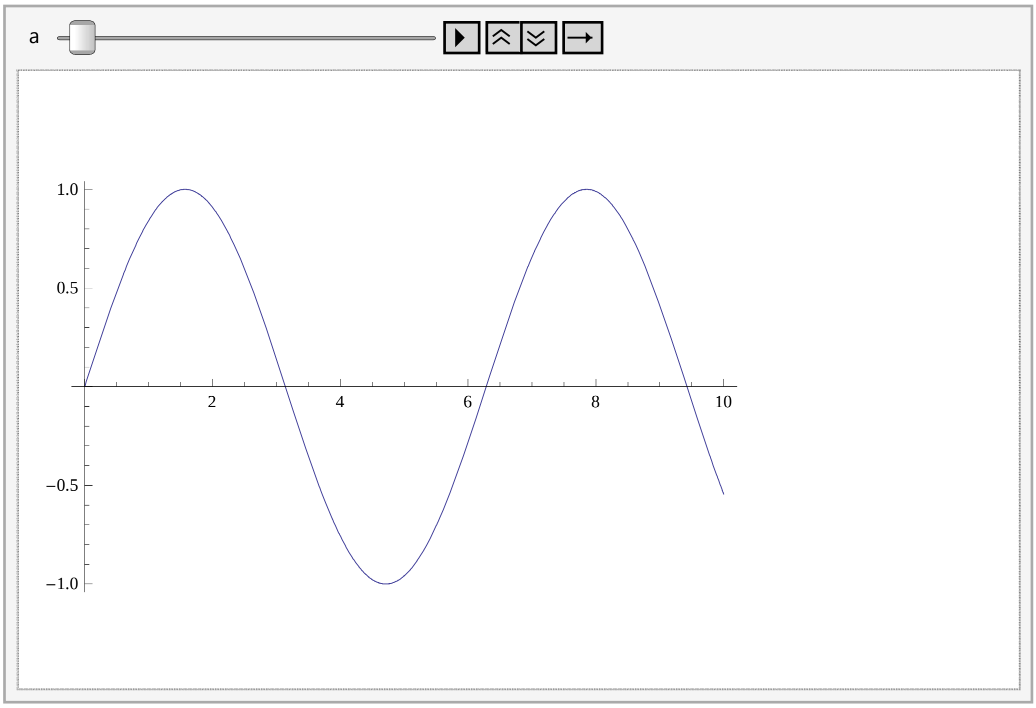


- Příkaz **`Animate`** umožňuje spojitě měnit parametry zkoumané funkce.

Příklady:

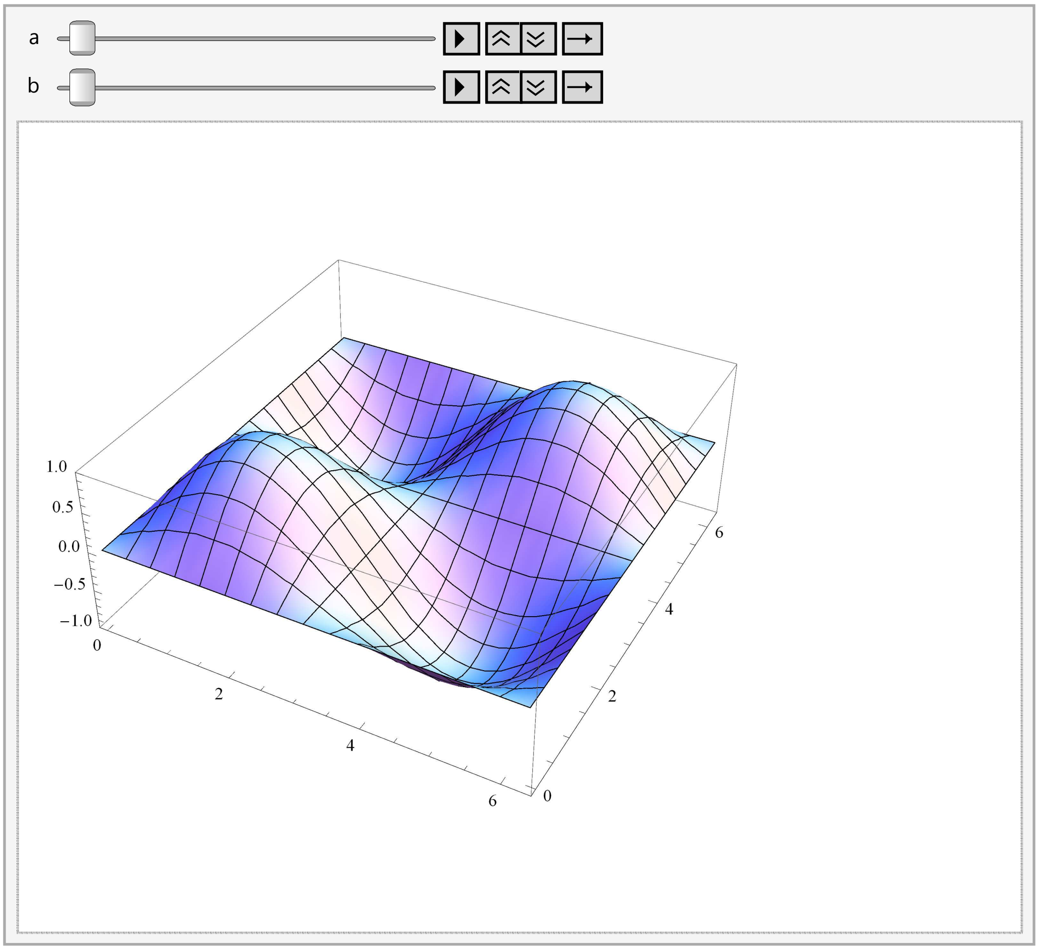
In[35]:=
```
Animate[Plot[Sin[x + a], {x, 0, 10}], {a, 0, 5}, AnimationRunning → False]
```

Out[35]=



In[36]:=
```
Animate[Plot3D[Sin[x + a] Sin[y + b], {x, 0, 2 Pi}, {y, 0, 2 Pi}, PlotRange → 1],
  {a, 0, Pi}, {b, 0, Pi}, AnimationRunning → False]
```

Out[36]=



2 Diferenciální počet funkce jedné proměnné

2.1 Reálná funkce reálné proměnné

2.1.1 Definice proměnné a práce s proměnnými

- Proměnnou definujeme pomocí syntaxe: **`název_proměnné = zvolená_hodnota`**.

Příklady:

```
In[37]:= x = 15
Out[37]= 15
```

- Nyní máme v proměnné x uloženu hodnotu 15. Proveďme výpočet výrazu x^2, za proměnnou x je automaticky dosazena její hodnota.

```
In[38]:= x^2
Out[38]= 225
```

- Další definování proměnné se stejným názvem (v našem případě x) způsobí přepsání předchozí hodnoty.

```
In[39]:= x = 5 + c
Out[39]= 5 + c
```

- Tato nová hodnota proměnné x se pak stává platnou pro další požití dané proměnné.

```
In[40]:= x^2
Out[40]= (5 + c)^2
```

- Tento výsledek lze vypsat i v jiném tvaru. V horním řádku zvolíme Cell → Convert To → TraditionalForm (nebo klávesy Shift+Ctrl+T).

In[41]:= x^2

Out[41]= $(c + 5)^2$

- Pro vymazání definice proměnné použijeme symbol **tečka**. Proměnné již nebude přiřazena žádná hodnota a bude vystupovat pouze jako symbol.

```
In[42]:= x = .
```

- V následujícím výrazu pak nebude přiřazena x žádná hodnota

```
In[43]:= x - 5 + 10 x
Out[43]= -5 + 11 x
```

2.1.2 Definice funkce

- Kromě toho, že *Mathematica* obsahuje mnoho integrovaných funkcí, umožňuje uživateli také definování vlastních funkcí.
- Uvedeme si příklad, který definuje funkci f proměnné x. Při definici se používá přiřazovacího symbolu **`:=`**. Za tímto symbolem pak následuje vyjádření samotné funkce.

```
name[var_] := expr
```

- **Podtržítko za proměnnou v definici funkce nesmíme zapomenout.**
- Funkci pak voláme jejím názvem a argumentem v hranatých závorkách. Argumentem funkce může být číslo nebo jakýkoliv výraz.

Příklady:

```
In[44]:= f[y_] := y^2
In[45]:= f[a + 5]
Out[45]= (5 + a)^2
In[46]:= f[4]
Out[46]= 16
In[47]:= f[3 y + y^2]
```

Out[47]= $\left(3\,y + y^2\right)^2$

- Pro zobrazení definice námi vytvořené funkce lze využít syntaxe **`?název_funkce`**.

```
In[48]:= ? f
```

```
Global`f
```

f[y_] := y^2

- Pro vymazání námi vytvořené funkce využijeme výrazu **`Clear[název_funkce]`**.

```
In[49]:= Clear[f]
```

2.2 Výpočet limity funkce

2.2.1 Limita funkce v bodě

- Obecný předpis pro limitu funkce *f(x)* v bodě x_0: **`Limit[f[x], x→x0]`**.

Příklady:

In[50]:=
```
Limit[f[x], x → x0] // TraditionalForm
```

Out[50]//TraditionalForm=

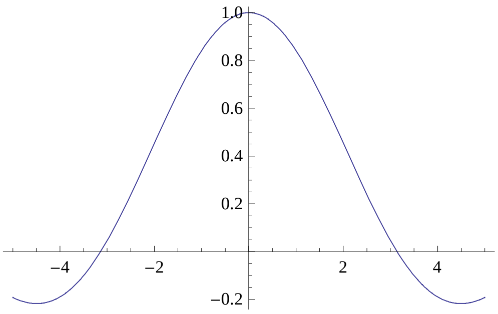
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

In[51]:=
```
Limit[Sin[x]/x, x → 0]
```

Out[51]= 1

In[52]:=
```
Plot[Sin[x]/x, {x, -5, 5}]
```

Out[52]=



2.2.2 Limita funkce v bodě - úlohy

- Příklady k procvičení - vypočítejte limity a zobrazte grafy příslušných funkcí na daných intervalech:

a)	$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$	(-7, 7)
b)	$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$	(1, 100), (-0.8, 1)
c)	$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$		(-0.9, 0.3)
d)	$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$	$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$	(-20, 1), (10, 200)
e)	$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2}$		(-15, 15)
f)	$\lim_{x \to 0} \frac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$		(-0.2, 5)

2.2.3 Limita funkce v bodě - řešení

a)

In[53]:= $\text{Limit}\left[\frac{1}{x},\ x \to \infty\right]$

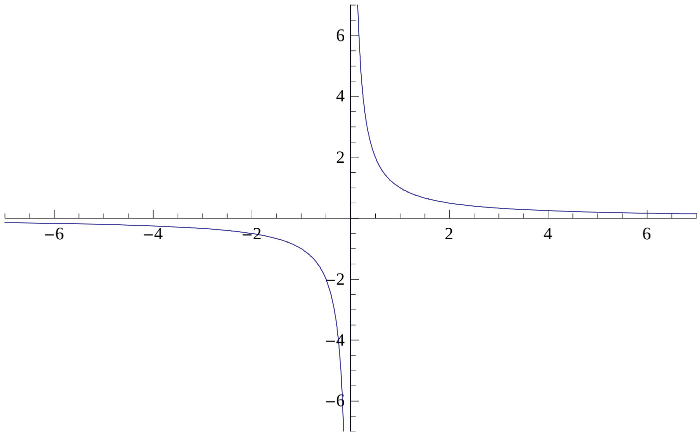
Out[53]= 0

In[54]:= $\text{Limit}\left[\frac{1}{x},\ x \to -\infty\right]$

Out[54]= 0

In[55]:= $\text{Plot}\left[\frac{1}{x},\ \{x, -7, 7\},\ \text{PlotRange} \to \{\{-7, 7\}, \{-7, 7\}\}\right]$

Out[55]=



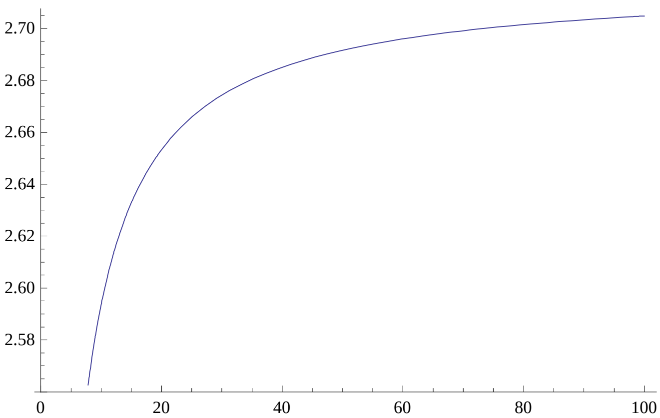
b)

In[56]:= $\text{Limit}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,\ x \to \infty\right]$

Out[56]= e

In[57]:= $\text{Plot}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,\ \{x, 1, 100\}\right]$

Out[57]=



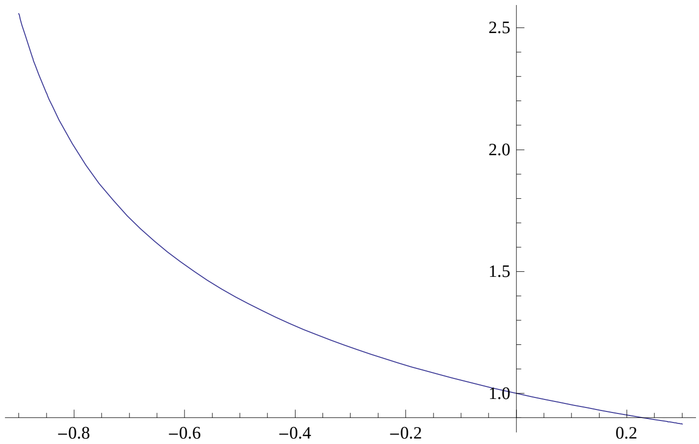
c)

In[58]:= $\text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[(1 + x)]}{x},\ x \to 0\right]$

Out[58]= 1

In[59]:= $\text{Plot}\left[\frac{\text{Log}[(1 + x)]}{x},\ \{x, -0.9, 0.3\}\right]$

Out[59]=



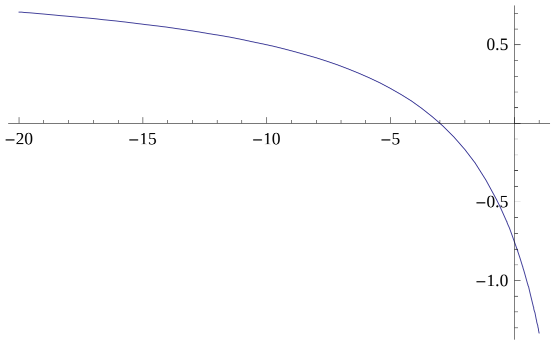
d)

In[60]:= $\mathbf{Limit}\left[\dfrac{\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-7\,x+12\right)},\ x\to 0\right]$

Out[60]= $-\dfrac{3}{4}$

In[61]:= $\mathbf{Plot}\left[\dfrac{\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-7\,x+12\right)},\ \{x,\,-20,\,1\}\right]$

Out[61]=

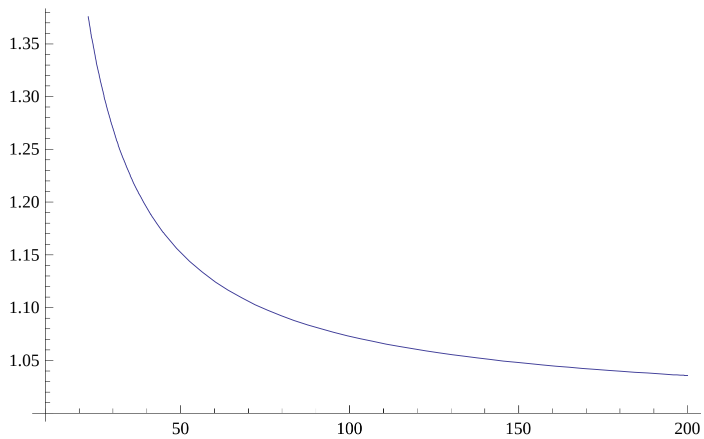


In[62]:= $\mathbf{Limit}\left[\dfrac{\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-7\,x+12\right)},\ x\to \infty\right]$

Out[62]= 1

In[63]:= $\mathbf{Plot}\left[\dfrac{\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-7\,x+12\right)},\ \{x,\,10,\,200\},\ \mathbf{AxesOrigin}\to\{10,\,1\}\right]$

Out[63]=



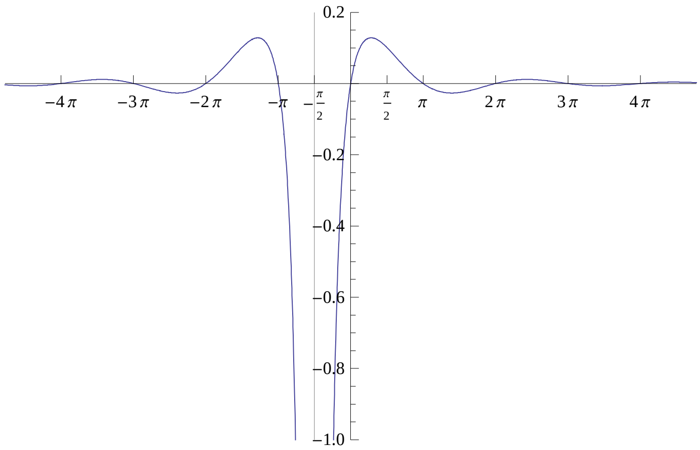
e)

In[64]:= Limit$\left[\frac{\text{Sin}[x]}{(x + \text{Pi}/2)^2},\ x \to -\text{Pi}/2\right]$

Out[64]= $-\infty$

In[65]:= Plot$\left[\frac{\text{Sin}[x]}{(x + \text{Pi}/2)^2},\ \{x, -15, 15\},\right.$
PlotRange $\to \{\{-15, 15\}, \{-1, 0.2\}\}$, GridLines $\to \left\{\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}, \text{None}\right\}$,
Ticks $\to \left.\left\{\left\{-4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\right\}, \text{Automatic}\right\}\right]$

Out[65]=



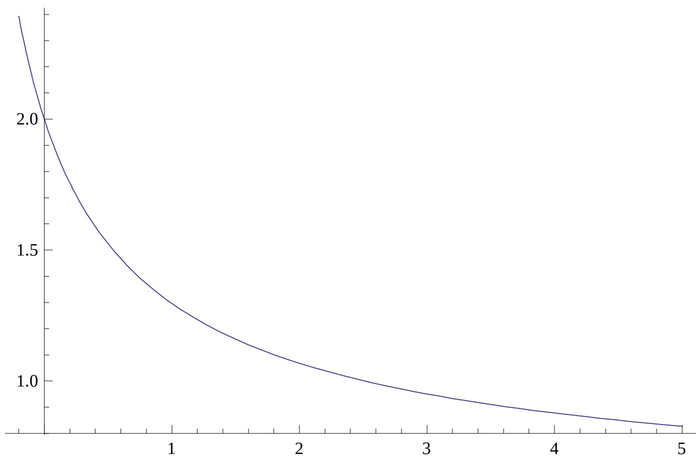
f)

In[66]:= Limit$\left[\frac{(x + \text{Log}[1 + x])}{(2x - \text{Log}[1 + x])},\ x \to 0\right]$

Out[66]= 2

In[67]:= Plot$\left[\frac{(x + \text{Log}[1 + x])}{(2x - \text{Log}[1 + x])},\ \{x, -0.2, 5\}\right]$

Out[67]=



2.2.4 Jednostranné limity funkce

- Obecný předpis pro jednostrannou limitu funkce *f(x)* v bodě x_0: `Limit[f[x], x→x0, Direction→±1]`.
- Jak je vidět, v předpisu se vyskytuje parametr `Direction`. Tento parametr nabývá pouze dvou hodnot, v závislosti na typu jednostranné limity. Pro limitu zleva nabývá hodnoty **1** a pro limitu zprava hodnoty **-1**.

Příklady:

In[68]:= `Limit[1/x, x → 0, Direction → 1]`

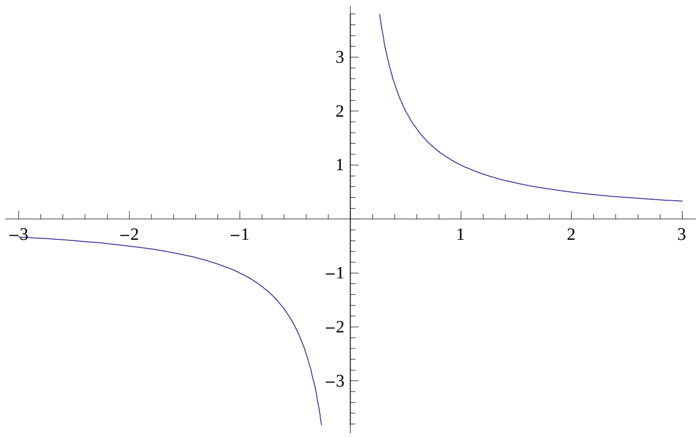
Out[68]= $-\infty$

In[69]:= `Limit[1/x, x → 0, Direction → -1]`

Out[69]= ∞

In[70]:= `Plot[1/x, {x, -3, 3}]`

Out[70]=



2.2.5 Jednostranné limity funkce - úlohy

- Příklady k procvičení - vypočítejte limity a zobrazte grafy příslušných funkcí na daných intervalech:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1}$ (-1, 3)

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ (-20, 20)

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ (-5, 5)

2.2.6 Jednostranné limity funkce - řešení

a)

In[71]:= `Limit[(x + 1)/(x - 1), x → 1, Direction → 1]`

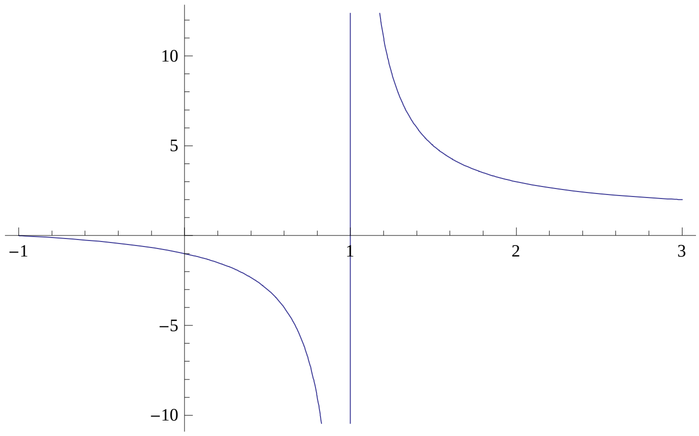
Out[71]= $-\infty$

In[72]:= `Limit[(x + 1)/(x - 1), x → 1, Direction → -1]`

Out[72]= ∞

In[73]:= `Plot[(x + 1)/(x - 1), {x, -1, 3}]`

Out[73]=



b)

In[74]:= `Limit[ArcTan[1/(1 - x)], x → 1, Direction → -1]`

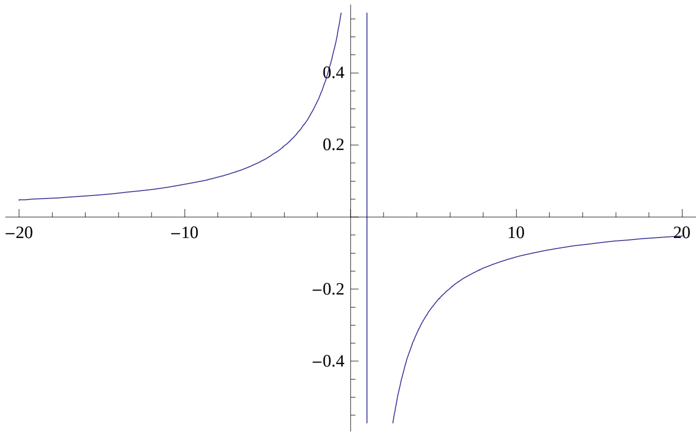
Out[74]= $-\frac{\pi}{2}$

In[75]:= `Limit[ArcTan[1/(1 - x)], x → 1, Direction → 1]`

Out[75]= $\frac{\pi}{2}$

In[76]:= `Plot[ArcTan[1/(1 - x)], {x, -20, 20}]`

Out[76]=



c)

In[77]:= `Limit[1/(1 + e^(1/x)), x → 0, Direction → 1]`

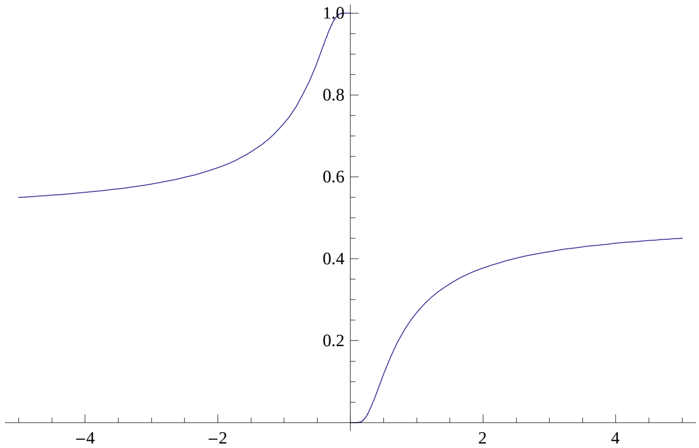
Out[77]= 1

In[78]:= `Limit[1/(1 + e^(1/x)), x → 0, Direction → -1]`

Out[78]= 0

In[79]:=
```
Show[Plot[1/(1 + e^(1/x)), {x, -5, 0}], Plot[1/(1 + e^(1/x)), {x, 0, 5}],
  PlotRange → {{-5, 5}, {0, 1}}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Out[79]=



2.3 Derivace funkce

2.3.1 Výpočet derivace funkce

- V prostředí *Mathematica* je možno derivaci zadávat více způsoby. Podívejme se nyní na tyto možnosti:
  - pomocí symbolu ∂_{var} expr nebo funkce $D[$expr, var$]$, například ∂_x `Sin[x]` nebo `D[Sin[x], x]`
    - derivace n-tého řádu se určí pomocí předpisu: `D[f, {x, n}]`
  - pomocí funkce **`Derivative`**
    - derivace prvního řádu se určí pomocí předpisu: `Derivative[1][funkce][x]`
    - derivace n-tého řádu se určí pomocí předpisu: `Derivative[n][funkce][x]`
    - zde však nejdříve musíme definovat funkci, kterou chceme derivovat, např. `funkce[x_]:=x^2`, pak již můžeme použít `Derivative[1][funkce][x]`

    pozn.: číslo v první závorce za příkazem **`Derivative`** znamená řád derivace.
  - pomocí apostrofu `f'[x]`
    - derivace vyšších řádů se určí například pomocí předpisu: `f''''[x]`

    pozn.: kolik apostrofů, tolikátá derivace se bude počítat, **pozor - neplatí zde tento zápis $f^{(n)}$ jako derivace n-tá řádu**
    - platí zde to samé jako v předchzím bodě, nejdříve definujeme funkci a pak ji zderivujeme, tzn.

    ```
    derivovana_funkce[x_]:= x^3+x
    derivovana_funkce'[x]
    ```
  - derivace v daném bodě - využijeme funkce **`Derivative`**, místo proměnné, podle které derivujeme, napíšeme hodnotu. Případně lze využít zápis `D[f, {x, n}] /. x → x0`

Příklady:

In[80]:= ∂_x `(x^4 - 3 x^2 + 10)`

Out[80]= $-6x + 4x^3$

In[81]:= `D[Sin[x]^10, {x, 4}]`

Out[81]= $5040 \operatorname{Cos}[x]^4 \operatorname{Sin}[x]^6 - 4680 \operatorname{Cos}[x]^2 \operatorname{Sin}[x]^8 + 280 \operatorname{Sin}[x]^{10}$

In[82]:= `D[Sin[x y] / (x^2 + y^2), x, y]`

Out[82]= $$-\frac{2x^2 \operatorname{Cos}[x y]}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2 \operatorname{Cos}[x y]}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\operatorname{Cos}[x y]}{x^2+y^2} + \frac{8 x y \operatorname{Sin}[x y]}{(x^2+y^2)^3} - \frac{x y \operatorname{Sin}[x y]}{x^2+y^2}$$

In[83]:=
```
f1[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10;
Derivative[2][f1][x]
```

Out[84]= $-6 + 12x^2$

In[85]:=
```
f2[x_] := x^4 - 3 x^2 + 10;
f2'[x]
```

Out[86]= $-6x + 4x^3$

In[87]:=
```
fce[x_] := 3 x^2 - 4 x;
Derivative[1][fce][3]
```

Out[88]= 14

In[89]:= `D[3 x^2 - 4 x, x] /. x → 3`

Out[89]= 14

2.3.2 Derivace funkce - úlohy

a) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$.

b) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_2(x) = \operatorname{arccosh} x$.

c) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_3(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ obecně a poté v bodě $x_0 = 1$.

d) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_4(x) = \frac{\ln(\cos x)}{\ln x}$.

e) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_5(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt{3+x^3}$ obecně a poté v bodě $x_0 = 0$.

f) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_6 = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

g) Určete derivaci 1. řádu funkce $f_7 = e^x\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}\right)$ obecně a poté v bodě $x_0 = \pi$.

h) Určete derivace 6. a 7. řádu funkce $f_8 = x\,(2\,x - 1)^2\,(x+3)^3$.

ch) Určete derivaci 3. řádu funkce $f_9 = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ obecně a poté v bodě $x_0 = -5$.

i) Určete derivaci 2. řádu funkce $f_{10} = \sin^2 x \cdot \ln x$.

j) Určete derivaci 3. řádu funkce $f_{11} = \frac{\cos 3\,x}{\sqrt[3]{1-3\,x}}$.

2.3.3 Derivace funkce - řešení

a)

In[90]:= `f1[x_] := ArcTan[x]; f1'[x]`

Out[90]= $$\frac{1}{1+x^2}$$

b)

In[91]:= `f2[x_] := ArcCosh[x]; D[f2[x], x]`

Out[91]= $$\frac{1}{\sqrt{-1+x}\,\sqrt{1+x}}$$

c)

In[92]:= `f3[x_] := ArcSin[(1 - x^2) / (1 + x^2)]; Derivative[1][f3][x]`

Out[92]= $$\frac{-\frac{2\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2\,x}{1+x^2}}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$$

In[93]:= `Simplify[Derivative[1][f3][x]]`

Out[93]= $-\frac{2\sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^2}}}{x}$

In[94]:= `Derivative[1][f3][1]`

Out[94]= -1

d)

In[95]:= `f4[x_] := Log[Cos[x]] / Log[x]; f4'[x]`

Out[95]= $-\frac{\text{Log}[\text{Cos}[x]]}{x\,\text{Log}[x]^2} - \frac{\text{Tan}[x]}{\text{Log}[x]}$

▪ Pozn.: funkce **`Log[x]`** má v programu *Mathematica* význam přirozeného logaritmu, pokud chceme zadat logaritmickou funkci o základu *a*, je třeba použít zápis **`Log[a,x]`**.

e)

In[96]:= `f5[x_] := (1 + x) √(2 + x^2) ∛(3 + x^3); f5'[x]`

Out[96]= $\frac{x^2 (1+x)\sqrt{2+x^2}}{(3+x^3)^{2/3}} + \frac{x(1+x)(3+x^3)^{1/3}}{\sqrt{2+x^2}} + \sqrt{2+x^2}\,(3+x^3)^{1/3}$

In[97]:= `f5'[0]`

Out[97]= $\sqrt{2}\;3^{1/3}$

In[98]:= `N[f5'[0]]`

Out[98]= 2.03965

f)

In[99]:= `f6[x_] := ⅇ^x + ⅇ^ⅇ^x + ⅇ^ⅇ^ⅇ^x; Derivative[1][f6][x]`

Out[99]= $e^x + e^{e^x+x} + e^{e^{e^x}+e^x+x}$

g)

In[100]:= `f7[x_] := ⅇ^x (1 + Cot[x/2]); D[f7[x], x]`

Out[100]= $e^x\left(1+\text{Cot}\left[\frac{x}{2}\right]\right) - \frac{1}{2}e^x\,\text{Csc}\left[\frac{x}{2}\right]^2$

In[101]:= `D[f7[x], x] /. x → π`

Out[101]= $\frac{e^\pi}{2}$

h)

In[102]:= `f8[x_] := x (2 x - 1)^2 (x + 3)^3; D[f8[x], {x, 6}]`

Out[102]= 2880

In[103]:= `Derivative[7][f8][x]`

Out[103]= 0

ch)

In[104]:= `f9[x_] := (1 + x) / Sqrt[1 - x]; Derivative[3][f9][x]`

Out[104]= $\frac{9}{4(1-x)^{5/2}} + \frac{15(1+x)}{8(1-x)^{7/2}}$

In[105]:= `Derivative[3][f9][-5]`

Out[105]= $\frac{1}{36\sqrt{6}}$

i)

In[106]:= `f10[x_] := Sin[x]^2 Log[x]; D[f10[x], {x, 2}]`

Out[106]= $\frac{4\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]}{x} - \frac{\mathrm{Sin}[x]^2}{x^2} + \mathrm{Log}[x]\left(2\,\mathrm{Cos}[x]^2 - 2\,\mathrm{Sin}[x]^2\right)$

j)

In[107]:= `f11[x_] := Cos[3 x]/(1 - 3 x)^(1/3); f11'''[x]`

Out[107]= $\frac{28\,\mathrm{Cos}[3\,x]}{(1-3\,x)^{10/3}} - \frac{27\,\mathrm{Cos}[3\,x]}{(1-3\,x)^{4/3}} - \frac{36\,\mathrm{Sin}[3\,x]}{(1-3\,x)^{7/3}} + \frac{27\,\mathrm{Sin}[3\,x]}{(1-3\,x)^{1/3}}$

2.4 Diferenciál funkce

- V prostředí *Mathematica* lze diferenciál funkce df určit pomocí předpisu **`Dt[f]`**.
- Diferenciál funkce $\frac{df}{dx}$ lze určit pomocí předpisu **`Dt[f,x]`**.
- Násobný diferenciál funkce lze určit pomocí předpisu **`Dt[f,{x,n}]`**.

Příklady:

```
In[108]:= Dt[3 x + 4]
Out[108]= 3 Dt[x]
In[109]:= Dt[3 x + 4, x]
Out[109]= 3
In[110]:= Simplify[Dt[2 x^2 - 3 x + 4]]
Out[110]= (-3 + 4 x) Dt[x]
In[111]:= Dt[a x, Constants → a]
Out[111]= a Dt[x, Constants → {a}]
```

▪ Pozn.: pokud bychom nedefinovali konstantu *a* pomocí parametru **`Constants`**, *Mathematica* by s touto konstantou pracovala jako s proměnnou závislou na *x*, tj. $a = a(x)$.

```
In[112]:= Dt[a x]
Out[112]= x Dt[a] + a Dt[x]
          x Dt[a] + a Dt[x]
          x Dt[a] + a Dt[x]
          x Dt[a] + a Dt[x]
          x Dt[a] + a Dt[x]
          x Dt[a] + a Dt[x]
In[113]:= Dt[ a x^2 + b x + c, Constants → {a, b, c}]
Out[113]= b Dt[x, Constants → {a, b, c}] + 2 a x Dt[x, Constants → {a, b, c}]
```

3 Diferenciální počet funkce dvou a více proměnných

3.1 Reálná funkce více reálných proměnných

- Pro zopakování uveďme, že reálnou funkci jedné reálné proměnné definujeme jako:

  `name[var_] := expr`

- Podobně budeme postupovat i u reálné funkce více proměnných, zápis bude vypadat takto:

  funkce [promenna$_1$_, promenna$_2$ _, ..., promenna$_n$_] := výraz

Příklady:

```
In[114]:= f[x_, y_] := (x - 2 y)^2
In[115]:= f[3, -1]
Out[115]= 25
In[116]:= f[x_, y_, z_, w_, q_] := x^y + z / w - q
In[117]:= f[2, 3, 4, 2, 7]
Out[117]= 3
```

3.2 Parciální derivace prvního a vyšších řádů

3.2.1 Výpočet parciálních derivací

K výpočtu parciálních derivací používáme stejných funkcí jako v případě derivace reálné funkce jedné proměnné. Podívejme se nyní na obecný zápis těchto funkcí:

○ ∂_x **funkce** nebo **D[funkce,x]** určí parciální derivaci funkce podle proměnné *x*

○ **D[funkce,{x, n}]** nebo **Derivative[n][funkce][x]** určí parciální derivaci *n*-tého řádu funkce podle proměnné *x*

Příklady:

```
In[118]:= ∂z (x^3 - 12 z^4 y^3)
Out[118]= -48 y^3 z^3
In[119]:= D[x^3 - 12 z^4 y^3, y]
Out[119]= -36 y^2 z^4
In[120]:= Fz[z_] := x^3 - 12 z^4 y^3; Derivative[3][Fz][z]
Out[120]= -288 y^3 z
In[121]:= ∂x,x (x^2 * y^2)
Out[121]= 2 y^2
In[122]:= D[x^2 * y^2, x, y, x]
Out[122]= 4 y
In[123]:= D[x^2 * y^2, {x, 2}, {y, 2}]
```

Out[123]= 4

```
In[124]:= D[x^2 * y^2, x] /. x → 2
```

Out[124]= $4\,y^2$

3.2.2 Parciální derivace - úlohy

a) Určete obě parciální derivace 1. řádu funkce $g_1(x,\ y) = 3\,x^2\,y + \sin x\,y^2$.

b) Určete obě parciální derivace 1. řádu funkce $g_2(x,\ y) = \sqrt[3]{x} + y^2$ nejprve obecně a potom v bodě [1,5].

c) Určete obě parciální derivaci 2. řádu funkce $g_3(x,\ y) = 2\,e^{-(x^2+y^2)}$ podle proměnné y.

d) Určete všechny parciální derivace 2. řádu funkce $g_4(x,\ y) = \frac{\ln \frac{x}{y}}{x^2-y^2}$ nejprve obecně a potom v bodě [2,4].

e) Určete všechny parciální derivace až do 3. řádu funkce $g_5(x,\ y) = x - y + x^2 + 2\,x\,y + y^2 + x^3 - 3\,x^2\,y - y^3 + x^4 - 4\,x^2\,y^2$

3.2.3 Parciální derivace - řešení

a)

In[125]:= $g_1[x\_,\ y\_] := 3\,x^2\,y + \mathrm{Sin}[x\,y^2];$

In[126]:= $\partial_x g_1[x,\ y]$

Out[126]= $6\,x\,y + y^2\,\mathrm{Cos}[x\,y^2]$

In[127]:= $\partial_y g_1[x,\ y]$

Out[127]= $3\,x^2 + 2\,x\,y\,\mathrm{Cos}[x\,y^2]$

b)

In[128]:= $g_2[x\_,\ y\_] := \sqrt[3]{x} + y^2;$

In[129]:= $D[g_2[x,\ y],\ x]$

Out[129]= $\frac{1}{3\,x^{2/3}}$

In[130]:= $D[g_2[x,\ y],\ x]\ /.\ \{x \to 1,\ y \to 5\}$

Out[130]= $\frac{1}{3}$

In[131]:= $D[g_2[x,\ y],\ y]$

Out[131]= $2\,y$

In[132]:= $D[g_2[x,\ y],\ y]\ /.\ \{x \to 1,\ y \to 5\}$

Out[132]= 10

c)

In[133]:= $g_3[x\_,\ y\_] := 2\,e^{-(x^2+y^2)};$

In[134]:= $D[g_3[x,\ y],\ \{y,\ 2\}]$

Out[134]= $2\left(-2\,e^{-x^2-y^2} + 4\,e^{-x^2-y^2}\,y^2\right)$

In[135]:= Simplify[%]

Out[135]= $e^{-x^2-y^2}\left(-4+8y^2\right)$

d)

In[136]:= $\mathbf{g_4[x\_, y\_] := \frac{Log\left[\frac{x}{y}\right]}{x^2-y^2};}$

In[137]:= `D[g4[x, y], x, x]`

Out[137]= $-\frac{4}{\left(x^2-y^2\right)^2}-\frac{1}{x^2\left(x^2-y^2\right)}+\frac{8x^2\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{\left(x^2-y^2\right)^3}-\frac{2\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{\left(x^2-y^2\right)^2}$

In[138]:= `D[g4[x, y], x, x] /. {x → 2, y → 4}`

Out[138]= $-\frac{1}{144}+\frac{7\,\text{Log}[2]}{216}$

In[139]:= `N[%]`

Out[139]= 0.0155187

In[140]:= `D[g4[x, y], y, y]`

Out[140]= $-\frac{4}{\left(x^2-y^2\right)^2}+\frac{1}{y^2\left(x^2-y^2\right)}+\frac{8y^2\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{\left(x^2-y^2\right)^3}+\frac{2\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{\left(x^2-y^2\right)^2}$

In[141]:= `D[g4[x, y], y, y] /. {x → 2, y → 4}`

Out[141]= $-\frac{19}{576}+\frac{13\,\text{Log}[2]}{216}$

In[142]:= `N[%]`

Out[142]= 0.00873108

In[143]:= `D[g4[x, y], x, y]`

Out[143]= $\frac{2x}{y\left(x^2-y^2\right)^2}+\frac{2y}{x\left(x^2-y^2\right)^2}-\frac{8xy\,\text{Log}\left[\frac{x}{y}\right]}{\left(x^2-y^2\right)^3}$

In[144]:= `D[g4[x, y], x, y] /. {x → 2, y → 4}`

Out[144]= $\frac{5}{144}-\frac{\text{Log}[2]}{27}$

In[145]:= `N[%]`

Out[145]= 0.0090501

e)

In[146]:= $\mathbf{g_5[x\_, y\_] := x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2;}$

In[147]:= $\partial_x g_5[x, y]$

Out[147]= $1+2x+3x^2+4x^3+2y-6xy-8xy^2$

In[148]:= $\partial_y g_5[x, y]$

Out[148]= $-1+2x-3x^2+2y-8x^2y-3y^2$

In[149]:= $\partial_{x,x} g_5[x, y]$

Out[149]= $2+6x+12x^2-6y-8y^2$

In[150]:= $\partial_{y,y} g_5[x, y]$

Out[150]= $2-8x^2-6y$

In[151]:= $\partial_{x,y} g_5[x, y]$

Out[151]= $2 - 6\,x - 16\,x\,y$

In[152]:= $\partial_{x,x,x} g_5[x, y]$

Out[152]= $6 + 24\,x$

In[153]:= $\partial_{y,y,y} g_5[x, y]$

Out[153]= -6

In[154]:= $\partial_{x,x,y} g_5[x, y]$

Out[154]= $-6 - 16\,y$

In[155]:= $\partial_{x,y,y} g_5[x, y]$

Out[155]= $-16\,x$

3.3 Totální diferenciál prvního a vyšších řádů

- K určení totálního diferenciálu pomocí programu *Mathematica* slouží funkce **`Dt`**.
- Syntaxe této funkce vypadá následovně:
  - **`Dt[funkce]`** najde totální diferenciál funkce.
  - **`Dt[funkce,x]`** zobrazí úplnou derivaci funkce podle proměnné *x*.
  - **`Dt[funkce,{x,n}]`** zobrazí *n*-tou úplnou derivaci podle *x*.

- Pomocí parametru **`Constans`** můžeme definovat různé konstanty vyskytující se ve výrazu.

Příklady:

```
In[156]:= Dt[x y]
Out[156]= y Dt[x] + x Dt[y]
In[157]:= Dt[x y, x]
Out[157]= y + x Dt[y, x]
In[158]:= Dt[a x y, x, Constants → a]
Out[158]= a y + a x Dt[y, x, Constants → {a}]
In[159]:= Dt[a x + b y, x, Constants → {a, b}]
Out[159]= a + b Dt[y, x, Constants → {a, b}]
In[160]:= Dt[x^3, {x, 2}]
Out[160]= 6 x
In[161]:= Dt[x^3 y, {x, 2}]
Out[161]= 6 x y + 6 x^2 Dt[y, x] + x^3 Dt[y, {x, 2}]
In[162]:= Dt[x^3 y, x, y]
Out[162]= 3 x^2 + 6 x y Dt[x, y] + 3 x^2 Dt[x, y] Dt[y, x]
In[163]:= Dt[x^3 y, x, y, Constants → x]
Out[163]= 3 x^2
In[164]:= Dt[x^3 y, x, y, Constants → y]
Out[164]= 3 x^2 + 6 x y Dt[x, y, Constants → {y}]
```

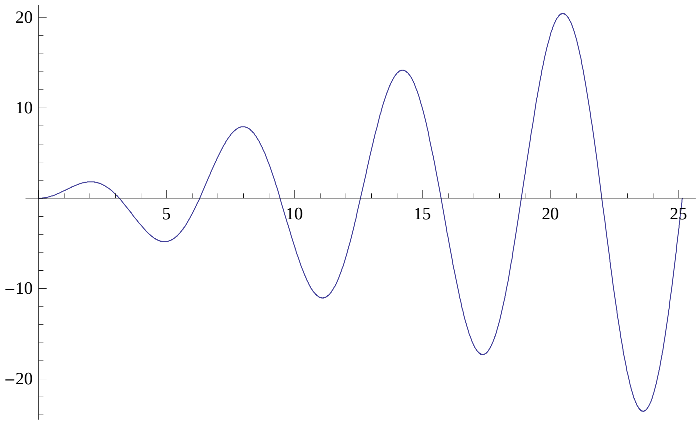
3.4 Lokální a globální extrémy funkcí

3.4.1 Lokální extrémy

- K určení lokálních extrémů se využívají funkce **FindMinimum** a **FindMaximum**:
  - Zadáme-li pouze **FindMinimum[funkce,x]** nebo **FindMaximum[funkce,x]**, získáme na výstupu lokální extrém automaticky zvolený systémem *Mathematica*.
  - Jestliže hledáme lokální extrém v intervalu, jehož dolní mez je x_0, potom nám zadání **FindMinimum[funkce,{x,x0}]** nebo **FindMaximum[funkce,{x,x0}]** určí lokální minimum nebo lokální maximum, které je nejblíže bodu x_0.
  - Lokální extrémi lze hledat také s ohledem na nějakou omezující podmínku pro hodnoty proměnné *x*: **FindMinimum[{funkce,podminky},{x,x0}]** nebo **FindMaximum[{funkce,podminky},{x,x0}]**.
  - Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných, například **FindMinimum[{funkce,podminky},{{x,x0},{y,y0},{z,z0},...}]**.

Příklady:

```
In[165]:= FindMinimum[x Sin[x], x]
Out[165]= {2.25906 × 10^-22, {x → 1.50302 × 10^-11}}
In[166]:= Plot[x Sin[x], {x, 0, 8 π}]
Out[166]=
```




```
In[167]:= FindMinimum[x Sin[x], {x, 10}]
Out[167]= {-11.0407, {x → 11.0855}}
In[168]:= FindMaximum[x Sin[x], {x, 10}]
Out[168]= {7.91673, {x → 7.97867}}
In[169]:= FindMinimum[{x Sin[x], 10 ≤ x ≤ 15}, {x, 13}]
Out[169]= {-11.0407, {x → 11.0855}}
In[170]:= FindMaximum[{x Sin[x], 10 ≤ x ≤ 15}, {x, 13}]
Out[170]= {14.1724, {x → 14.2074}}
In[171]:= FindMinimum[Sin[x]^2 Sin[y], {{x, 1}, {y, -2}}]
Out[171]= {-1., {x → 1.5708, y → -1.5708}}
In[172]:= FindMaximum[Sin[x] Sin[y], {{x, 2}, {y, 2}}]
Out[172]= {1., {x → 1.5708, y → 1.5708}}
```

3.4.1 Globální extrémy

- Globální extrémy získáme pomocí funkcí **`Minimize`** a **`Maximize`**:
  - Pro funkce jedné proměnné: **`Minimize[funkce,x]`** nebo **`Maximize[funkce,x]`**.
  - Pro funkce více proměnných: **`Minimize[funkce,{x,y,z,...}]`** nebo **`Maximize[funkce,{x,y,z,...}]`**.
  - Případně s ohledem na nějakou omezující podmínku, například interval nebo množina: **`Minimize[{funkce,podminky},x]`** nebo **`Maximize[{funkce,podminky},x]`**.

Příklady:

a) Určete globální minimum kvadratické funkce $y = 2x^2 - 5x + 2$. Jaký výsledek ukáže *Mathematica*, zadáme-li kvadratickou funkci obecně $y = a x^2 + b x + c$?

Řešení:

In[173]:= **Minimize**$\left[2\,x^2 - 5\,x + 2,\ x\right]$

Out[173]= $\left\{-\frac{9}{8},\ \left\{x \to \frac{5}{4}\right\}\right\}$

In[174]:= **Minimize**$\left[a\,x^2 + b\,x + c,\ x\right]$

Out[174]= $$\left\{\begin{cases} c & (b == 0 \,\&\&\, a == 0) \,||\, (b == 0 \,\&\&\, a > 0) \\ \frac{-b^2+4\,a\,c}{4\,a} & (b > 0 \,\&\&\, a > 0) \,||\, (b < 0 \,\&\&\, a > 0) \\ -\infty & \text{True} \end{cases},\right.$$
$$\left.\left\{x \to \begin{cases} 0 & (b == 0 \,\&\&\, a == 0) \,||\, (b == 0 \,\&\&\, a > 0) \\ -\frac{b}{2\,a} & (b > 0 \,\&\&\, a > 0) \,||\, (b < 0 \,\&\&\, a > 0) \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}\right\}\right\}$$

b) Jaké je globální minimum funkce $f(x,\ y) = x^2 + 2\,y^2 + 2\,x + 8\,y + 5$?

Řešení:

In[175]:= **Minimize**$\left[x^2 + 2\,y^2 + 2\,x + 8\,y + 5,\ \{x,\ y\}\right]$

Out[175]= $\{-4,\ \{x \to -1,\ y \to -2\}\}$

c) Najděte globální maximum funkce $f(x,\ y) = 2\,x + 3\,y$ na kruhu $x^2 + y^2 \le 1$.

Řešení:

In[176]:= **Maximize**[{2 x + 3 y, x^2 + y^2 ≤ 1}, {x, y}]

Out[176]= $\left\{\sqrt{13},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{\sqrt{13}} + \sqrt{13}\right),\ y \to \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}\right\}$

4 Integrální počet funkce jedné proměnné

4.1 Neurčitý integrál

4.1.1 Výpočet neurčitého integrálu

● Pro výpočet neurčitého integrálu v prostředí *Mathematica* můžeme využít funkce **`Integrate`** nebo symbolického zápisu nacházejícího se v nástrojové paletě:

○ syntaxe funkce **`Integrate`** vypadá následovně: **`Integrate[`** *expr* **`,`** *var* **`]`**

○ symbolický zápis integrace lze zadat z palet: $\int$ *expr* d *var*

○ **integrační konstanta** konstanta není v systému *Mathematica* u výsledků uváděna, na serveru Wolfram|Alpha ji však nalezneme (viz ukázka v kapitole 1.1)

Příklady:

In[177]:= $\int x^2 \, dx$

Out[177]= $\frac{x^3}{3}$

In[178]:= $\int (x\verb|^|3 - 2\,x\,y)\, dx$

Out[178]= $\frac{x^4}{4} - x^2\,y$

```
In[179]:= Integrate[x^2, x]
```

Out[179]= $\frac{x^3}{3}$

```
In[180]:= Integrate[x^3 - 2 x y, x]
```

Out[180]= $\frac{x^4}{4} - x^2\,y$

```
In[181]:= Integrate[x^3 - 2 x y + y^x, x]
```

Out[181]= $\frac{x^4}{4} - x^2\,y + \frac{y^x}{\text{Log}[y]}$

4.1.2 Neurčitý integrál - úlohy

● Příklady k procvičení - vypočtěte následující integrály (podmínky existence integrálů ponecháme k určení čtenáři):

a) $\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} \, dx$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

d) $\int x \operatorname{arccotg} x\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2(3x)}\,dx$

f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$

g) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

h) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$

i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}\,dx$

j) $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$

k) $\int \sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\,dx$

l) $\int \sin^5 x\,dx$

m) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

n) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$

o) $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$

p) $\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16}\,dx$

q) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-2}{(x-3)^2(x^2-4x+5)}\,dx$

r) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}\,dx$

s) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$

4.1.3 Neurčitý integrál - řešení

a)

In[182]:= `Integrate[x + Sqrt[x], x]`

Out[182]= $\frac{2 x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2}$

b)

In[183]:= `Integrate[x^2 / Sqrt[x], x]`

Out[183]= $\frac{2 x^{5/2}}{5}$

c)

In[184]:= $\int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx$

Out[184]= `x - ArcTan[x]`

d)

In[185]:= `Integrate[x * ArcCot[x], x]`

Out[185]= $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} x^2 \,\mathrm{ArcCot}[x] - \frac{\mathrm{ArcTan}[x]}{2}$

e)

In[186]:= $\int \left(\frac{1}{\mathrm{Sin}[3\,x]^2}\right) dx$

Out[186]= $-\frac{1}{3} \mathrm{Cot}[3\,x]$

f)

In[187]:= `Integrate[Cos[x]^3 / Sin[x], x]`

Out[187]= $\frac{1}{4} \mathrm{Cos}[2\,x] + \mathrm{Log}[\mathrm{Sin}[x]]$

▪ Pozn.: u některých integrálů, zejména goniometrických funkcí, je třeba vzít v úvahu tvar výsledku. Výsledek ručně vypočítaný se může lišit od výstupu v programu *Mathematica*. Doporučujeme využít funkce určené pro úpravy goniometrických výrazů, např. **`TrigExpand`**, **`TrigFactor`** nebo **`TrigReduce`**.

In[188]:= `TrigExpand[%]`

Out[188]= $\frac{\mathrm{Cos}[x]^2}{4} + \mathrm{Log}[\mathrm{Sin}[x]] - \frac{\mathrm{Sin}[x]^2}{4}$

g)

In[189]:= $\int \frac{\mathrm{ArcCos}[x] - x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

Out[189]= $\sqrt{1 - x^2} - \frac{\mathrm{ArcCos}[x]^2}{2}$

h)

In[190]:= `Integrate[(2 x^2 - 3 x - 3) / ((x - 1) (x^2 - 2 x + 5)), x]`

Out[190]= $\frac{1}{2} \mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2} (-1 + x)\right] - \mathrm{Log}[1 - x] + \frac{3}{2} \mathrm{Log}\left[5 - 2\,x + x^2\right]$

i)

In[191]:= `Integrate[1 / (x Sqrt[x^2 + 4 x - 4]), x]`

Out[191]= $\frac{1}{2}\,\text{ArcTan}\left[\frac{-2+x}{\sqrt{-4+4x+x^2}}\right]$

j)

In[192]:= `Integrate[(x + 1) / ((2 x + x^2) Sqrt[2 x + x^2]), x]`

Out[192]= $-\frac{1}{\sqrt{x\,(2+x)}}$

k)

In[193]:= $\text{Integrate}\left[\sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3},\ x\right]$

Out[193]= $\frac{8}{77}\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\left(1+\sqrt{x}\right)^3\right)^{1/4}\left(-4+7\sqrt{x}\right)$

l)

In[194]:= $\int \text{Sin}[x]^5\,dx$

Out[194]= $-\frac{5\,\text{Cos}[x]}{8}+\frac{5}{48}\,\text{Cos}[3x]-\frac{1}{80}\,\text{Cos}[5x]$

m)

In[195]:= $\int \text{Tan}[x]^3\,dx$

Out[195]= $\text{Log}[\text{Cos}[x]]+\frac{\text{Sec}[x]^2}{2}$

n)

In[196]:= $\text{Integrate}\left[\text{Sin}[x]\text{^}3 \big/ \sqrt[3]{\text{Cos}[x]\text{^}4},\ x\right]$

Out[196]= $\frac{3\,\text{Cos}[x]\left(5+\text{Cos}[x]^2\right)}{5\left(\text{Cos}[x]^4\right)^{1/3}}$

o)

In[197]:= $\int \frac{e^x\sqrt{\text{ArcTan}[e^x]}}{1+e^{2x}}\,dx$

Out[197]= $\frac{2}{3}\,\text{ArcTan}[e^x]^{3/2}$

p)

In[198]:= $\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16}\,dx$

Out[198]= $-\frac{2}{3\,(4-3x)}+\text{Log}[4-3x]$

q)

In[199]:= $\int \frac{x^3-6x^2+10x-2}{(x-3)^2\left(x^2-4x+5\right)}\,dx$

Out[199]= $-\frac{1}{2(-3+x)}-\frac{3}{2}\text{ArcTan}[2-x]+\frac{1}{2}\text{Log}\left[2+2(-3+x)+(-3+x)^2\right]$

r)

In[200]:= $\int \frac{1}{\sqrt[4]{\text{Sin}[x]^3\,\text{Cos}[x]^5}}\,dx$

Out[200]= $\frac{4\,\text{Cos}[x]\,\text{Sin}[x]}{\left(\text{Cos}[x]^5\,\text{Sin}[x]^3\right)^{1/4}}$

s)

In[201]:= $\int \frac{1}{1+\text{Tan}[x]}\,dx$

Out[201]= $\frac{1}{2}\left(x+\text{Log}[\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]]\right)$

4.2 Určitý integrál

4.2.1 Výpočet určitého integrálu

● Pro výpočet určitého integrálu opět využijeme funkce **`Integrate`** nebo symbolického zápisu nacházejícího se v nástrojové paletě:

○ funkce **`Integrate`** - syntaxe této funkce vypadá následovně:

`Integrate``[` *expr* `, {` *var* `,` *lower* `,` *upper* `}]`

○ symbolický zápis integrace: $\int_{lower}^{upper} expr \, \mathbb{d}\, var$

Příklady:

In[202]:= $\int_1^3 x^2 \, \mathbb{d}x$

Out[202]= $\frac{26}{3}$

In[203]:= $\int_1^3 (x\text{^}3 - 2\,x\,y) \, \mathbb{d}x$

Out[203]= $20 - 8\,y$

In[204]:= `Integrate[x^2, {x, 1, 3}]`

Out[204]= $\frac{26}{3}$

In[205]:= `Integrate[x^3 - 2 x y, {x, 1, 3}]`

Out[205]= $20 - 8\,y$

In[206]:= `Integrate[Cos[x / 2]^2, {x, 0, Pi}]`

Out[206]= $\frac{\pi}{2}$

4.2.2 Určitý integrál - úlohy

● Příklady k procvičení - vypočtěte následující určité integrály:

a) $\int_a^b x^2 \, d x$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5\,x)^3} \, d x$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\,x} \cos x \, d x$

d) $\int_0^1 \sqrt{2\,x - x^2} \, d x$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6 - 5 \cos x + \cos^2 x} \, d x$

f) $\int_{-1}^{3} x\, e^{3-x^2} \, d x$

g) $\int_{e}^{e^2} 3\,x \ln x \, dx$

4.2.3 Určitý integrál - řešení

a)

In[207]:=
```
Integrate[x^2, {x, a, b}]
```

Out[207]= $-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$

b)

In[208]:= $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11 + 5\,x)^3}\, dx$

Out[208]= $\frac{7}{72}$

c)

In[209]:=
```
Integrate[Exp[2 x] Cos[x], {x, 0, Pi / 2}]
```

Out[209]= $\frac{1}{5}\left(-2 + e^{\pi}\right)$

d)

In[210]:=
```
Integrate[Sqrt[2 x - x^2], {x, 0, 1}]
```

Out[210]= $\frac{\pi}{4}$

e)

In[211]:=
```
Integrate[Sin[x] / (6 - 5 Cos[x] + Cos[x]^2), {x, 0, Pi / 2}]
```

Out[211]= $\mathrm{Log}\left[\frac{4}{3}\right]$

f)

In[212]:=
```
Integrate[x Exp[3 - x^2], {x, -1, 3}]
```

Out[212]= $\frac{-1 + e^8}{2\,e^6}$

g)

In[213]:=
```
Integrate[3 x Log[x], {x, Exp[1], Exp[2]}]
```

Out[213]= $\frac{3}{4}\,e^2\left(-1 + 3\,e^2\right)$

5 Úvod do řešení diferenciálních rovnic

5.1 Zadání diferenciálních rovnic prvního a vyšších řádů

● Pro řešení diferenciálních rovnic n-tého řádu a soustavy diferenciálních rovnic se používá integrované funkce **DSolve**. Ukažme si nyní nejčastější způsoby použití této funkce:

○ Vstup **DSolve**[**rovnice,y[x],x**] řeší diferenciální rovnici pro závislou proměnnou *y* s nezávisle proměnnou *x*. Výsledkem je obecné řešení zadané diferenciální rovnice.

○ Chceme-li vyřešit diferenciální s počátečními nebo okrajovými podmínkami, zadáme **DSolve**[**{rovnice,pocatecni_podminky},y[x],x]**.

○ Pro zadání soustavy diferenciálních rovnic použijeme zápis **DSolve**[**{rovnice1,rovnice2,...},{**y_1**[x],**y_2**[x],...},x]**.

○ S obecným nebo partikulárním řešením můžeme v programu *Mathematica* dále pracovat. Například můžeme zjednodušit výsledek pomocí funkce **Simplify** nebo funkci graficky znázornit pomocí funkcí **Plot**, **Plot3D** apod.

Příklady:

In[214]:= `DSolve[y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[x], x]`

Out[214]= $\left\{\left\{y[x]\to e^{-x}\,C[1]+\frac{1}{2}\,a\,(-\mathrm{Cos}[x]+\mathrm{Sin}[x])\right\}\right\}$

In[215]:= `DSolve[{y'[x] - y[x] == 0, y[0] == 1}, y[x], x]`

Out[215]= $\{\{y[x]\to e^{x}\}\}$

In[216]:= `DSolve[{y''[x] + 3 y'[x] + 40 y[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 1 / 3}, y, x]`

Out[216]= $\left\{\left\{y\to \mathrm{Function}\left[\{x\},\ \frac{1}{453}\,e^{-3x/2}\left(453\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right]+11\sqrt{151}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right]\right)\right]\right\}\right\}$

In[217]:= `DSolve[{y'[x] - z[x] - x == 0, z'[x] + y[x] - 2 * x == 0}, {y[x], z[x]}, x]`

Out[217]= $\{\{y[x]\to C[1]\,\mathrm{Cos}[x]+C[2]\,\mathrm{Sin}[x]+\mathrm{Cos}[x]\,(\mathrm{Cos}[x]+2\,x\,\mathrm{Cos}[x]-2\,\mathrm{Sin}[x]+x\,\mathrm{Sin}[x])+$
$\mathrm{Sin}[x]\,(2\,\mathrm{Cos}[x]-x\,\mathrm{Cos}[x]+\mathrm{Sin}[x]+2\,x\,\mathrm{Sin}[x]),$
$z[x]\to C[2]\,\mathrm{Cos}[x]-C[1]\,\mathrm{Sin}[x]-\mathrm{Sin}[x]\,(\mathrm{Cos}[x]+2\,x\,\mathrm{Cos}[x]-2\,\mathrm{Sin}[x]+x\,\mathrm{Sin}[x])+$
$\mathrm{Cos}[x]\,(2\,\mathrm{Cos}[x]-x\,\mathrm{Cos}[x]+\mathrm{Sin}[x]+2\,x\,\mathrm{Sin}[x])\}\}$

In[218]:= `Simplify[DSolve[{y'[x] - z[x] - x == 0, z'[x] + y[x] - 2 * x == 0}, {y[x], z[x]}, x]]`

Out[218]= $\{\{y[x]\to 1+2\,x+C[1]\,\mathrm{Cos}[x]+C[2]\,\mathrm{Sin}[x],\ z[x]\to 2-x+C[2]\,\mathrm{Cos}[x]-C[1]\,\mathrm{Sin}[x]\}\}$

● Použití funkce **DSolve** a následnou práci s výsledkem si ukážeme na několika příkladech.

5.2 Diferenciální rovnice prvního řádu

Příklady:

a) Určete řešení diferenciální rovnice $y' = 1 + \frac{2y}{x}$ vyhovující počáteční podmínce $y(1) = 2$.

Řešení: Jedná se o homogenní diferenciální rovnici. Nejprve můžeme najít obecné řešení

```
In[219]:= DSolve[y'[x] == 1 + (2 y[x])/x, y[x], x]

Out[219]= {{y[x] → -x + x^2 C[1]}}
```

a poté zahrneme počáteční podmínku:

```
In[220]:= DSolve[{y'[x] == 1 + (2 y[x])/x, y[1] == 2}, y[x], x]

Out[220]= {{y[x] → -x + 3 x^2}}
```

b) Určete řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$při počáteční podmínce $y(0) = 1$.

Řešení: Obecné řešení této lineární diferenciální rovnice prvního řádu lze odkrývat obdobně jako při manuálním výpočtu:

```
In[221]:= DSolve[y'[x] - y[x] Tan[x] == 0, y[x], x]

Out[221]= {{y[x] → C[1] Sec[x]}}
```

Pozn.: Program *Mathematica* často využívá při vyjádření výsledků funkci $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

```
In[222]:= DSolve[y'[x] - y[x] Tan[x] == 1/Cos[x], y[x], x]

Out[222]= {{y[x] → x Sec[x] + C[1] Sec[x]}}
```

Řešení Caychyho úlohy získáme takto:

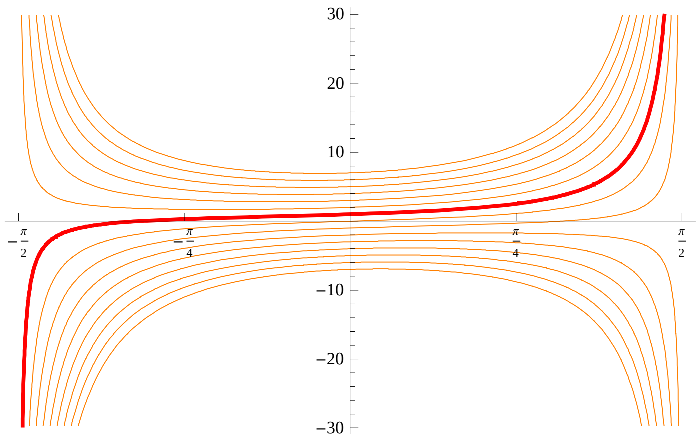
```
In[223]:= DSolve[{y'[x] - y[x] Tan[x] == 1/Cos[x], y[0] == 1}, y[x], x]

Out[223]= {{y[x] → Sec[x] + x Sec[x]}}
```

Zobrazme nyní na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ grafy několika partikulárních řešení, které vzniknou volbou konstanty C v obecném řešení, přičemž řešení Cauchyovy úlohy ($C = 1$) zvýrazníme.

```
In[224]:= Plot[{Evaluate@Table[x Sec[x] + C Sec[x], {C, -7, 7}],
   Evaluate@Table[x Sec[x] + C Sec[x], {C, {1}}]}, {x, -π/2, π/2},
  PlotStyle → {Orange, {Red, Thick}}, Ticks → {{-π/2, -π/4, 0, π/4, π/2}, Automatic}]
```

Out[224]=



c) Určete všechna řešení diferenciální rovnice $3\,x\,y' - 2\,y = \frac{x^2}{y^2}$.

Řešení: Zde se jedná o Bernoulliovu diferenciální rovnici. *Mathematica* nám ukáže také výsledky v komplexním oboru:

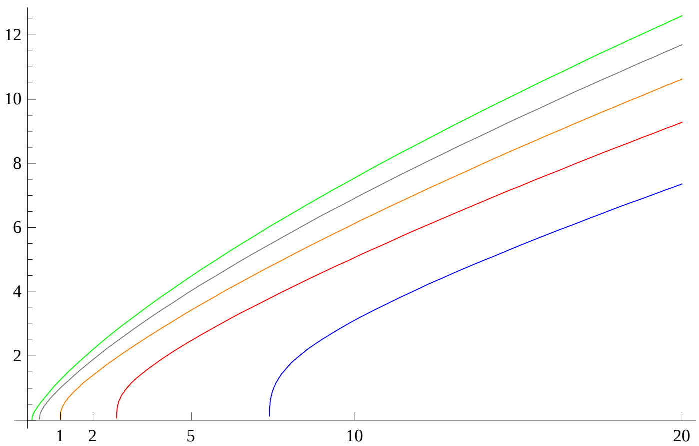
In[225]:= $\texttt{DSolve}\left[3\,x\,y'[x] - 2\,y[x] == \frac{x^2}{y[x]^2},\ y[x],\ x\right]$

Out[225]= $\left\{\left\{y[x] \to x^{2/3}\,(C[1] + \text{Log}[x])^{1/3}\right\},\ \left\{y[x] \to -(-1)^{1/3}\,x^{2/3}\,(C[1] + \text{Log}[x])^{1/3}\right\},\ \left\{y[x] \to (-1)^{2/3}\,x^{2/3}\,(C[1] + \text{Log}[x])^{1/3}\right\}\right\}$

Vybereme-li první (reálné) řešení, můžeme opět zobrazit grafy několika partikulárních řešení, které vzniknou volbou konstanty C v obecném řešení:

In[226]:= **Plot**[**Evaluate@Table**[$\mathbf{x^{2/3}}$ **(C + Log[x])**$^{\mathbf{1/3}}$**, {C, {-2, -1, 0, 1, 2}}], {x, 0, 20},**
PlotStyle → {Blue, Red, Orange, Gray, Green}, Ticks → {{1, 2, 5, 10, 20}, Automatic}]

Out[226]=



d) Určete řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici $3\,y' + y^2 = -\frac{2}{x^2}$ při počáteční podmínce $y(1) = 3$.

Řešení: Zde se jedná o Riccatiovu diferenciální rovnici. Aplikací funkce **Simplify** můžeme obecné řešení zjednodušit:

In[227]:= $\texttt{DSolve}\left[3\,y'[x] + y[x]^2 == -\frac{2}{x^2},\ y[x],\ x\right]$

Out[227]= $\left\{\left\{y[x] \to -\frac{3\left(-1 + \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{2\,C[1]}{x^{1/3} + C[1]}\right)\right)}{2\,x}\right\}\right\}$

Výsledek je možné zjednodušit:

In[228]:= **Simplify**[%]

Out[228]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{2\,x^{1/3} + C[1]}{x^{4/3} + x\,C[1]}\right\}\right\}$

a určit řešení Cauchyovy úlohy:

In[229]:= $\mathtt{DSolve}\left[\left\{3\,y'[x] + y[x]^2 == -\frac{2}{x^2},\ y[1] == 3\right\},\ y[x],\ x\right]$

Out[229]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{-1 + 4\,x^{1/3}}{\left(-1 + 2\,x^{1/3}\right)\,x}\right\}\right\}$

5.3 Diferenciální rovnice vyšších řádů

Příklady:

a) Řešte Cauchyovu úlohu pro diferenciální rovnici $y'' + 9\,y = \frac{1}{\sin 3\,x}$ při počátečních podmínkách $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Řešení: Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty. Obecné řešení lze odkrývat obdobně jako při manuálním výpočtu, tzn. nejprve řešit rovnici homogenní a najít fundamentální systém řešení:

```
In[230]:= DSolve[y''[x] + 9 y[x] == 0, y[x], x]
Out[230]= {{y[x] → C[1] Cos[3 x] + C[2] Sin[3 x]}}
```

Obecné řešení nehomogenní rovnice potom

```
In[231]:= DSolve[y''[x] + 9 y[x] == 1/Sin[3 x], y[x], x]
Out[231]= {{y[x] → C[1] Cos[3 x] + C[2] Sin[3 x] + 1/9 (-3 x Cos[3 x] + Log[Sin[3 x]] Sin[3 x])}}
In[232]:= Expand[%]
Out[232]= {{y[x] → -1/3 x Cos[3 x] + C[1] Cos[3 x] + C[2] Sin[3 x] + 1/9 Log[Sin[3 x]] Sin[3 x]}}
```

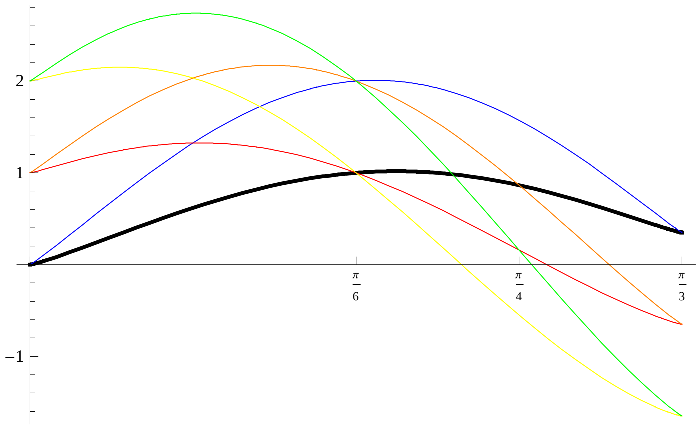
Cauchyově úloze potom vyhovuje funkce

```
In[233]:= DSolve[{y''[x] + 9 y[x] == 1/Sin[3 x], y[π/6] == 1, y'[π/6] == π/6}, y[x], x]
Out[233]= {{y[x] → 1/9 (-3 x Cos[3 x] + 9 Sin[3 x] + Log[Sin[3 x]] Sin[3 x])}}
In[234]:= Expand[%]
Out[234]= {{y[x] → -1/3 x Cos[3 x] + Sin[3 x] + 1/9 Log[Sin[3 x]] Sin[3 x]}}
```

Zobrazme nyní na intervalu $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ grafy několika partikulárních řešení, které vzniknou volbou konstant C_1 a C_2 v obecném řešení, přičemž řešení Cauchyovy úlohy zvýrazníme.

```
In[235]:= Plot[Evaluate@Table[-1/3 x Cos[3 x] + C1 Cos[3 x] + C2 Sin[3 x] + 1/9 Log[Sin[3 x]] Sin[3 x],
      {C1, {0, 1, 2}}, {C2, {1, 2}}], {x, 0, π/3},
   PlotStyle → {{Black, Thick}, Blue, Red, Orange, Yellow, Green},
   Ticks → {{0, π/6, π/4, π/3}, Automatic}]
```

Out[235]=



b) Určete funkci popisující volné netlumené a tlumené kmity (konstantu charakterizující interakci mezi prostředím a oscilátorem označme *b*) hmotného bodu (hmotnost *m*) kmitajícího na pružině tuhosti *k* při nulové počáteční výchylce a počáteční rychlosti v_0.

Řešení: Diferenciální rovnice popisující netlumené kmity má tvar $m\,\frac{d^2y}{dt^2} + k\,y = 0$, počáteční podmínky potom $y(0) = 0$ a $y'(0) = v_0$. V obou případech se jedná o Cauchyovu úlohu pro homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty:

In[236]:= `DSolve[{m y''[x] + k y[x] == 0, y[0] == 0, y'[0] == v0}, y[x], x]`

Out[236]= $$\left\{\left\{y[x] \to \frac{\sqrt{m}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{k}\ x}{\sqrt{m}}\right] v_0}{\sqrt{k}}\right\}\right\}$$

In[237]:= `DSolve[{m y''[x] + b y'[x] + k y[x] == 0, y[0] == 0, y'[0] == v0}, y[x], x]`

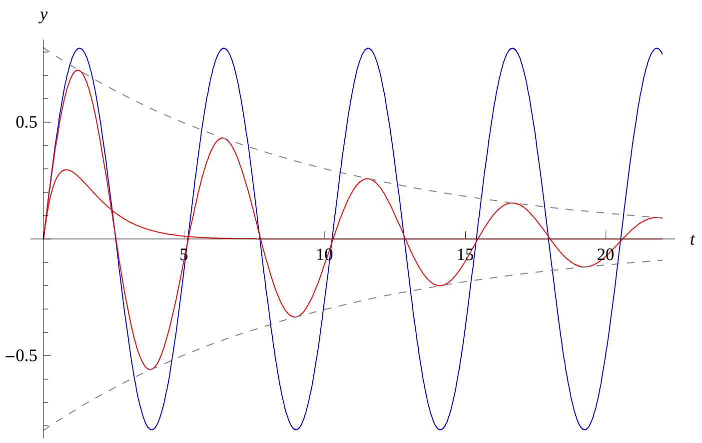
Out[237]= $$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{\left(e^{\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4\,k\,m}\right)x}{2\,m}} - e^{\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4\,k\,m}\right)x}{2\,m}}\right) m\, v_0}{\sqrt{b^2-4\,k\,m}}\right\}\right\}$$

Řešení pro tlumení je pochopitelně nutno diskutovat s ohledem na parametry pod druhou odmocninou. Zobrazme řešení graficky pro volby parametrů, např. $m = 2$, $k = 3$, $v_0 = 1$, pro tlumení zvolíme parametr *b* nejprve $b = 0,4$ a poté $b = 5$:

In[238]:= $$\mathbf{Plot}\Big[\Big\{\mathbf{Evaluate@Table}\Big[\frac{\sqrt{m}\ \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{k}\ x}{\sqrt{m}}\right] v0}{\sqrt{k}}, \{m, \{2\}\}, \{k, \{3\}\}, \{v0, \{1\}\}\Big], \mathbf{Evaluate@}$$
$$\mathbf{Table}\Big[-\frac{\left(e^{\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4\,k\,m}\right)x}{2\,m}} - e^{\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4\,k\,m}\right)x}{2\,m}}\right) m\, v0}{\sqrt{b^2-4\,k\,m}}, \{m, \{2\}\}, \{k, \{3\}\}, \{v0, \{1\}\}, \{b, \{0.4, 5\}\}\Big],$$
$$\mathbf{Evaluate@Table}\Big[\frac{2\,e^{\frac{-b\,x}{2\,m}}\,m\,v0}{\sqrt{4\,k\,m-b^2}}, \{m, \{2\}\}, \{k, \{3\}\}, \{v0, \{1\}\}, \{b, \{0.4\}\}\Big],$$
$$\mathbf{Evaluate@Table}\Big[-\frac{2\,e^{\frac{-b\,x}{2\,m}}\,m\,v0}{\sqrt{4\,k\,m-b^2}}, \{m, \{2\}\}, \{k, \{3\}\}, \{v0, \{1\}\}, \{b, \{0.4\}\}\Big]\Big\},$$

```
{x, 0, 22}, PlotStyle → {Blue, Red, {Gray, Dashed}, {Gray, Dashed}},
Ticks → {{0, 5, 10, 15, 20}, Automatic},
AxesLabel → {StyleForm[t, Italic], StyleForm[y, Italic]}]
```

Out[238]=



c) Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y''' + 2\,y'' + 3\,y' = \sin^2 x$.

Řešení: *Mathematica* umožňuje řešit také diferenciální rovnice vyšších řádů. Jako příklad uvádíme tuto nehomogenní lineární diferenciální rovnici 3. řádu s konstantními koeficienty.

In[239]:=
```
DSolve[1/2 y'''[x] + 2 y''[x] + 3 y'[x] == Sin[x]^2, y[x], x]
```

Out[239]=
$$\left\{\left\{y[x] \to C[3] + \frac{1}{204}\,e^{-2x}\left(34\,e^{2x}\,x + 12\,e^{2x}\,\mathrm{Cos}[2x] - 34\left(\sqrt{2}\,C[1] + 2\,C[2]\right)\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\,x\right] - 3\,e^{2x}\,\mathrm{Sin}[2x] - 68\,C[1]\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,x\right] + 34\,\sqrt{2}\,C[2]\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,x\right]\right)\right\}\right\}$$

In[240]:=
```
Expand[%]
```

Out[240]=
$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{x}{6} + C[3] + \frac{1}{17}\,\mathrm{Cos}[2x] - \frac{e^{-2x}\,C[1]\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\,x\right]}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\,e^{-2x}\,C[2]\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\,x\right] - \frac{1}{68}\,\mathrm{Sin}[2x] - \frac{1}{3}\,e^{-2x}\,C[1]\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,x\right] + \frac{e^{-2x}\,C[2]\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,x\right]}{3\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

d) Určete tvar obecného řešení diferenciální rovnice $x\,y'' + y' - y = 0$.

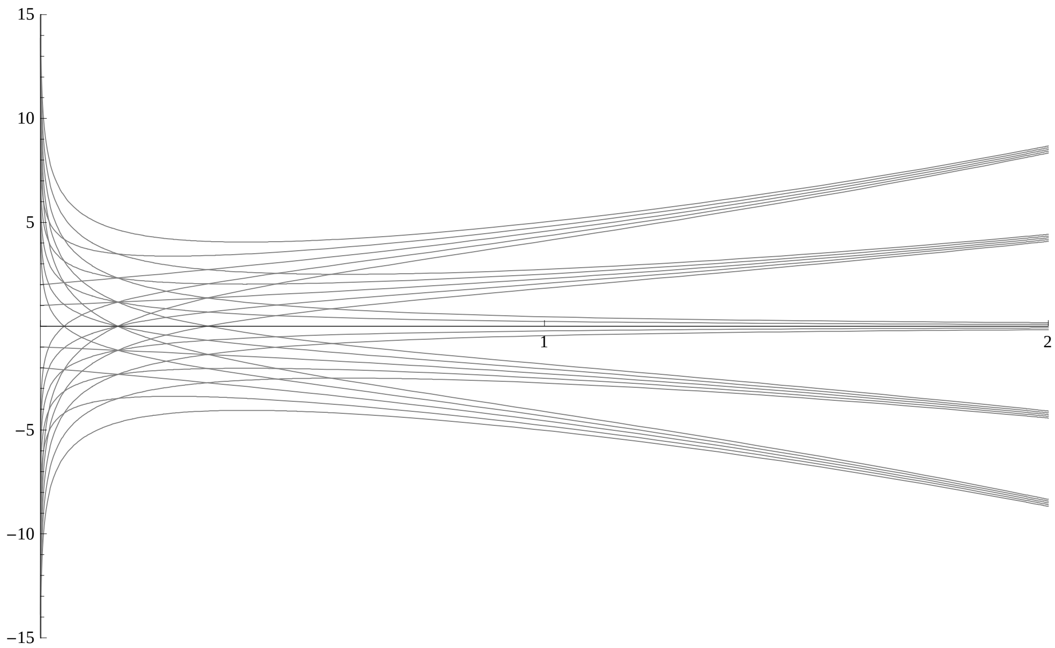
Řešení: Tuto lineární diferenciální rovnici 2. řádu řešíme pomocí nekonečných řad, které v tomto případě vedou na Besselovy funkce. *Mathematica* má Besselovy funkce, stejně jako řadu dalších speciálních funkcí, implementované a umožňuje s nimi dále pracovat, například zobrazit grafy několika partikulárních řešení:

In[241]:=
```
DSolve[x y''[x] + y'[x] - y[x] == 0, y[x], x]
```

Out[241]=
$$\left\{\left\{y[x] \to \mathrm{BesselI}\left[0, 2\sqrt{x}\right]C[1] + 2\,\mathrm{BesselK}\left[0, 2\sqrt{x}\right]C[2]\right\}\right\}$$

In[242]:=
```
Plot[Evaluate@Table[BesselI[0, 2 Sqrt[x]] C1 + 2 BesselK[0, 2 Sqrt[x]] C2,
    {C1, {-2, -1, 0, 1, 2}}, {C2, {-2, -1, 0, 1, 2}}], {x, 0, 2},
  PlotStyle → Gray, Ticks → {{0, 1, 2}, Automatic}, PlotRange → {{0, 2}, {-15, 15}}]
```

Out[242]=



e) Určete řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici $y'' = -2 + y'^2$ při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Řešení: Chceme-li najít obecné řešení zadané diferenciální rovnice 2. řádu, zjistíme, že *Mathematica* nenalezne odpovídající analyticky vyjádřenou funkci:

In[243]:=
```
DSolve[{y''[t] == -2 + y'[t]^3}, y[t] , t]
```

Out[243]=

$$\left\{\left\{y[t] \to C[2] + \int_1^t \text{InverseFunction}\left[-\frac{1}{6\times 2^{2/3}}\left(2\sqrt{3}\,\text{ArcTan}\left[\frac{1+2^{2/3}\,\#1}{\sqrt{3}}\right] - 2\,\text{Log}\left[2-2^{2/3}\,\#1\right] + \text{Log}\left[2 + 2^{2/3}\,\#1 + 2^{1/3}\,\#1^2\right]\right)\&\right][C[1]+K[1]]\,dK[1]\right\}\right\}$$

Podobně je tomu v případě zahrnutí počátečních podmínek, kdy nezískáme řešení žádné:

In[244]:=
```
DSolve[{y''[t] == -2 + y'[t]^3, y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[t] , t]
```

DSolve::bvfail : For some branches of the general solution, unable to solve the conditions. ≫

Out[244]= { }

Rovnici proto je lépe řešit numericky pomocí funkce **`NDSolve`**. Zde je nutné zvolit interval, na němž řešení hledáme, např. (-1;1):

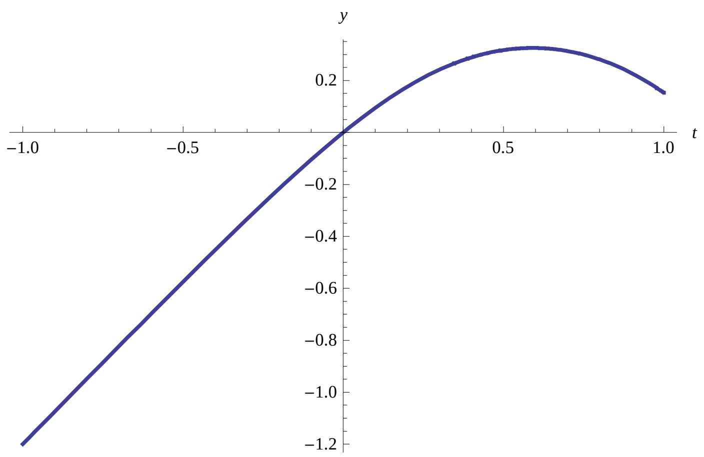
In[245]:=
```
NRDF = NDSolve[{y''[t] == -2 + y'[t]^3, y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[t] , {t, -1, 1}]
```

Out[245]=
```
{{y[t] → InterpolatingFunction[{{-1., 1.}}, <>][t]}}
```

Mathematica má pro numerická řešení implementovanou funkci **`InterpolatingFunction`**, s níž můžeme dále pracovat, např. vykreslit graf řešení:

In[246]:=
```
Plot[y[t] /. NRDF, {t, -1, 1},
 AxesLabel → {StyleForm[t, Italic], StyleForm[y, Italic]}, PlotStyle → Thick]
```

Out[246]=



5.4 Soustavy diferenciálních rovnic

Příklad:

a) Najděte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic $x' = -3\,x - 4\,y + 2\,t$ a $y' = x + y + t$. Poté určete řešení splňující počáteční podmínky $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Řešení: Jako příklad soustavy diferenciálních rovnic ukážeme výpočet řešení nehomogenní lineární soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Obecné řešení získáme zadáním:

```
In[247]:= DSolve[{x'[t] == -3 x[t] - 4 y[t] + 2 t, y'[t] == x[t] + y[t] + t}, {x[t], y[t]}, t]
```

Out[247]= $\{\{x[t] \to 4\,t\,(9 - 9\,t + 4\,t^2) - 2\,(-1 + 2\,t)\,(7 - 7\,t + 4\,t^2) - e^{-t}\,(-1 + 2\,t)\,C[1] - 4\,e^{-t}\,t\,C[2],$
$y[t] \to -(1 + 2\,t)\,(9 - 9\,t + 4\,t^2) + 2\,t\,(7 - 7\,t + 4\,t^2) + e^{-t}\,t\,C[1] + e^{-t}\,(1 + 2\,t)\,C[2]\}\}$

Přidáním počátečních podmínek obdržíme:

```
In[248]:= DSolve[{x'[t] == -3 x[t] - 4 y[t] + 2 t,
    y'[t] == x[t] + y[t] + t, x[0] == 0, x'[0] == 0}, {x[t], y[t]}, t]
```

Out[248]= $\{\{x[t] \to -2\,e^{-t}\,(7 - 7\,e^t + 4\,t + 3\,e^t\,t),\ y[t] \to e^{-t}\,(9 - 9\,e^t + 4\,t + 5\,e^t\,t)\}\}$

```
In[249]:= Expand[%]
```

Out[249]= $\{\{x[t] \to 14 - 14\,e^{-t} - 6\,t - 8\,e^{-t}\,t,\ y[t] \to -9 + 9\,e^{-t} + 5\,t + 4\,e^{-t}\,t\}\}$

5.5 Parciální diferenciální rovnice

Příklady:

a) Najděte řešení parciální diferenciální rovnice $2\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=0$.

Řešení: Pro zápis parciální diferenciální rovnice jako vstupu použijeme funkci **D**:

```
In[250]:= PDR = 2 D[y[x, t], x] + D[y[x, t], t] == 0
```

```
Out[250]= y^(0,1)[x, t] + 2 y^(1,0)[x, t] == 0
```

Výpočet řešení takové diferenciální rovnice zadáme opět pomocí **DSolve**:

```
In[251]:= reseni = DSolve[PDR, y[x, t], {x, t}]
```

$$\text{Out[251]= } \{\{y[x,t]\to C[1]\left[\tfrac{1}{2}(2t-x)\right]\}\}$$

Zde C[1] představuje volitelnou funkci, nikoliv konstantu jako v předchozích příkladech. Zavedeme-li toto řešení jako funkci **f[x,t]**, můžeme s výsledkem jako s funkcí dále počítat:

```
In[252]:= f[x_, t_] = y[x, t] /. reseni[[1]]
```

$$\text{Out[252]= } C[1]\left[\tfrac{1}{2}(2t-x)\right]$$

```
In[253]:= f[1, t]
```

$$\text{Out[253]= } C[1]\left[\tfrac{1}{2}(-1+2t)\right]$$

K parciální diferenciální rovnici můžeme dále přidat počáteční nebo okrajovou podmínku, např. $y(0,\,t)=\cos t$:

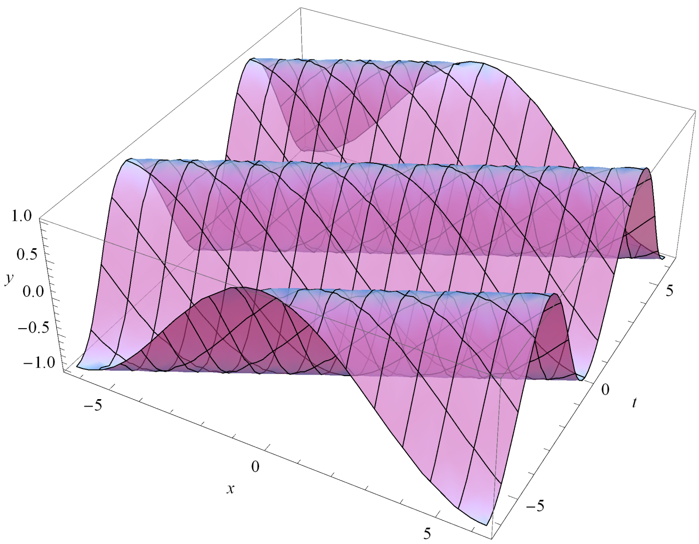
```
In[254]:= reseni1 = DSolve[{PDR, y[0, t] == Cos[t]}, y[x, t], {x, t}]
```

$$\text{Out[254]= } \{\{y[x,t]\to \mathrm{Cos}\left[\tfrac{1}{2}(2t-x)\right]\}\}$$

Nakonec zobrazíme výsledné řešení graficky:

```
In[255]:= Plot3D[y[x, t] /. reseni1, {x, -2 π, 2 π}, {t, -2 π, 2 π}, PlotStyle -> Opacity[0.7],
  AxesLabel → {StyleForm[x, Italic], StyleForm[t, Italic], StyleForm[y, Italic]}]
```

Out[255]=



b) Řešte jednorozměrný případ vlnové rovnice $\nabla^2 y=\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, kde y představuje například okamžitou výchylku kmitající struny nebo membrány, v je rychlost šíření vlny.

Řešení: Jednorozměrný případ vlnové rovnice napíšeme ve tvaru $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$:

In[256]:= $\texttt{DSolve}\left[\texttt{D[y[x, t], x, x]} - \frac{1}{\texttt{v}^2}\texttt{D[y[x, t], t, t]} == 0\texttt{, y[x, t], \{x, t\}}\right]$

Out[256]= $\left\{\left\{\texttt{y[x, t]} \to \texttt{C[1]}\left[\texttt{t} - \frac{\sqrt{\texttt{v}^2}\ \texttt{x}}{\texttt{v}^2}\right] + \texttt{C[2]}\left[\texttt{t} + \frac{\sqrt{\texttt{v}^2}\ \texttt{x}}{\texttt{v}^2}\right]\right\}\right\}$

In[257]:= **Simplify[%, v > 0]**

Out[257]= $\left\{\left\{\texttt{y[x, t]} \to \texttt{C[1]}\left[\texttt{t} - \frac{\texttt{x}}{\texttt{v}}\right] + \texttt{C[2]}\left[\texttt{t} + \frac{\texttt{x}}{\texttt{v}}\right]\right\}\right\}$

Volbu funkcí `C[1]` a `C[2]` bychom poté provedli na základě počátečních a okrajových podmínek.

6 Závěr

Anotace

Publikace se věnuje využití programu *Mathematica* (verze 8.0.4) při výpočtech úloh a problémů matematické analýzy. Obsahuje návody a řešené úlohy z diferenciálního počtu reálné funkce jedné a více reálných proměnných, integrálního počtu reálné funkce jedné proměnné a diferenciálních rovnic. Zabývá se rovněž problematikou zobrazení grafů reálných funkcí jedné a více reálných proměnných. Publikace je určena zejména studentům, pedagogickým a vědeckým pracovníkům přírodovědných a ekonomických oborů.

Závěr

Matematika je dnes oborem nezbytným pro studium a následnou profesní kariéru v přírodovědných i ekonomických disciplínách a odpovídajících učitelských oborech. V současnosti je třeba si klást otázky: Jakým způsobem je realizována současná výuka matematiky? Je výuka matematiky opravdu totéž jako schopnost počítat nebo provést nějaký výpočet? Jaký je význam matematiky pro profesní kariéru a myšlení mladých lidí, případně pro společnost?

V době počítačů, notebooků a tabletů, jejichž výpočetní možnosti mnohonásobně převyšují možnosti kalkulaček, je nevyhnutelné tyto prostředky zahrnout do výuky a vést studenty k jejich smysluplnému používání. Tím však není myšlena pouze aplikace k pohodlnému provedení výpočtů. Díky moderním technologiím by měl vzniknou prostor k řešení náročnějších problémů, testování různých přístupů k problémům a diskusi nových kreativních myšlenek. Implementace profesionálního matematického software *Mathematica* (verze 8.0.4), který lze dnes používat kromě počítačů a notebooků také pomocí tabletů nebo prostřednictvím webových rozhraní, do výuky, přispívá dle našeho názoru ke zkvalitnění vyučovacího procesu těchto náročných a často neoblíbených oborů.

Summary

Mathematics is currently considered fundamental science, which is essential for further study and professional career in hard sciences, in disciplines of economics and also in corresponding teaching disciplines. However, it is necessary to ask a question: How is the education of mathematics performed? Is honestly the education of this subject equal only to the ability to count or to carry out some kind of a calculation? Is mathematics significant for professional career, for thinking of young people or eventually for the society?

Nowadays, in the time of PCs, laptops and tablets, which can exceed the possibilities of calculators many times, it is necessary to involve these devices into the educational process and to lead the students for their usage. This usage should not be limited just to the performance of a simple calculation. These modern technologies should provide the students with sufficient background for the solutions of much more complex problems, for the tests of different approaches to the established problems and for the discussion of new creative thoughts. Therefore, the implementation of professional software *Mathematica* (version 8.0.4), which can be nowadays used not only in PCs, laptops but also in tablets or via the Internet, into the education can contribute to the improvement of quality of the educational process of both hard sciences and disciplines of economics, which are traditionally not the most popular subjects.

7 Použitá literatura

- Baumann, G.: *Mathematica* for Theoretical Physics. Springer Science, New York. 2005.
- Dick, S., Riddle, A., Stein, D.: *Mathematica* in the Laboratory. Cambridge University Press, Cambridge. 1997.
- Hassani, S.: Mathematical methods using *Mathematica* : for students of physics and related field. Springer Science, New York. 2003.
- Chramcov, B.: Základy práce v prostředí *Mathematica*. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Zlín. 2005.
- Jirásek, F., Čipera, S., Vacek, M.: Sbírka řešených příkladů z matematiky II. SNTL, Praha. 1989.
- Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky. SNTL / ALFA, Praha. 1982.
- Kopáček, J. a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky III. MATFYZPRESS MFF UK, Praha. 1996.
- Kováčová, M., Záhonová, V.: Matematika pomocou THE MATHEMATICAL EXPLORER. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2006.
- McMahon, D., Topa, D.: A Beginner' s Guide to *Mathematica.* Chapman & Hall/CRC, New York. 2006.
- Wellin, P., Gaylord, R., Kamin, S.: An Introduction to Programming with *Mathematica.* Cambridge University Press, Cambridge. 2008.
- Homepage of Wolfram Research. URL: http://www.wolfram.com.